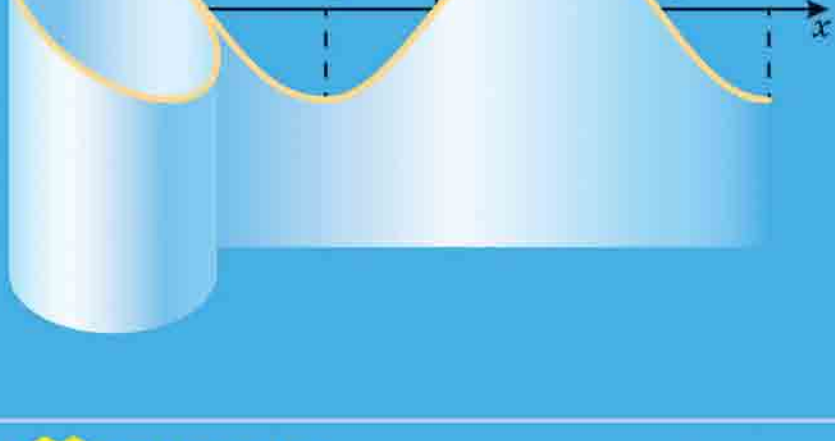
А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

10

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ



ГІМНАЗІЯ

Форзац 1

«Моя любов – Україна і математика». Ці слова Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942) викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві.

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

Форзац 2

Властивості кореня *n*-го степеня

$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a,$ $\sqrt[2k]{a^{2k}}=\lvert a\rvert$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$
$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$	$\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}$

Властивості степеня

$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$	$a^p : a^q = a^{p-q}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$(ab)^p = a^p b^p$	

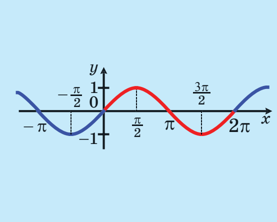
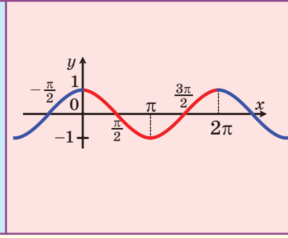
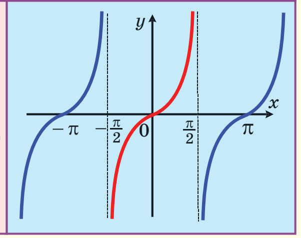
Таблиця похідних

$(c)'=0$	$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)'=\cos x$
$(x)'=1$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила знаходження похідних

$(f\pm g)'=f'\pm g'$	$(fg)'=f'\cdot g+g'\cdot f$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-g'\cdot f}{g^2}$

Графіки тригонометричних функцій

$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
		

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2018

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 256 с. : іл.
ISBN 978-966-474-310-2.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

ISBN 978-966-474-310-2

ВІД АВТОРІВ

Любі десятикласники та десятикласниці!

У наш час немає такої галузі науки, де не застосовують досягнень математики. У фізиці та хімії, астрономії та біології, географії та економіці, навіть у лінгвістиці та історії використовують «математичний інструмент».

Сподіваємось, що отримати ґрунтовні математичні знання вам допоможе підручник, який ви тримаєте в руках. Він складається з двох розділів: перший присвячений алгебрі і початкам аналізу (пункти 1–26), другий — геометрії (пункти 27–43).

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий навчальний предмет. Він розвиває аналітичне й логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість. Цього року ви починаєте знайомство з елементами математичного аналізу; вам доведеться розглядати нові класи функцій, вивчати їхні властивості, опановувати методи дослідження функцій.

Розділ геометрії, у якому вивчають фігури в просторі та їхні властивості, називають **стереометрією**. Саме цей розділ геометрії ви будете вивчати в 10 і 11 класах. Слово «стереометрія» походить від грецьких слів «стереос» — «об'ємний», «просторовий» і «метрео» — «вимірювати». Знати стереометрію надзвичайно важливо. Без просторової уяви та глибоких геометричних знань неможливо опанувати інженерні професії, будівельну або архітектурну справу, працювати в галузі комп'ютерної графіки, дизайну, моделювання одягу та взуття тощо. І це зрозуміло, адже більшість об'єктів, що нас оточують, — створених як людиною, так і природою, — не є плоскими (рис. 1).

Дзвіниця Києво-Печерської лаври

Український літак «Мрія» — найбільший літак у світі

Вид Землі з космосу

Рис. 1

Підручник поділено на пункти. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження. Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, у підручнику наведено тільки формулювання теорем.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Бажаємо успіху!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° — завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ — завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ — завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} — задачі для математичних гуртків і факультативів;

◄ — закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;

ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

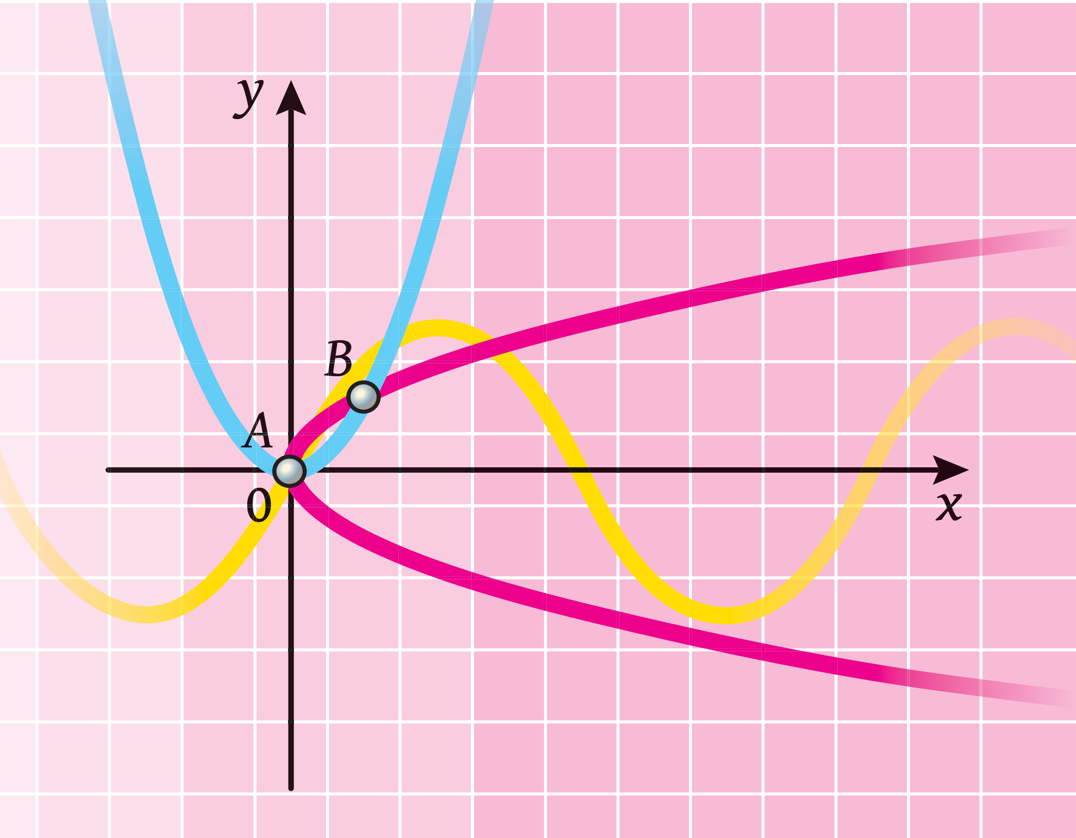
Розділ 1

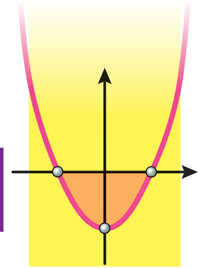
Алгебра і початки аналізу

§1. Функції, їхні властивості та графіки

§2. Тригонометричні функції

§3. Похідна та її застосування





§1 ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

У цьому параграфі ви повторите основні відомості про функцію; дізнаєтеся, що називають найбільшим і найменшим значеннями функції на множині, які функції називають парними, а які — непарними; ознайомитеся з властивостями графіків парних і непарних функцій.

Ви дізнаєтесь, яку функцію називають степеневою функцією із цілим показником, які властивості має ця функція; що називають коренем n-го степеня, які властивості має корінь n-го степеня; що називають степенем з раціональним показником і які його властивості; які рівняння називають ірраціональними.

Ви навчитеся добувати корені n-го степеня; виконувати піднесення до степеня з раціональним показником; перетворювати вирази, які містять степені з раціональним показником і корені n-го степеня; розв'язувати ірраціональні рівняння.

1. Найбільше і найменше значення функції. Парні та непарні функції

Перед вивченням цього пункту рекомендуємо виконати вправи 1.24–1.28.

У 7 класі ви ознайомилися з поняттям функції і під час вивчення багатьох розділів курсу алгебри неодноразово зверталися до цього поняття. Таке значне місце функція займає не випадково, адже математичними моделями багатьох реальних процесів є саме функції.

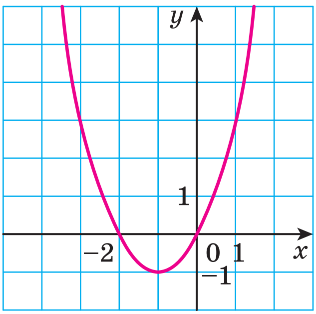


Рис. 1.1

Вам відомі такі поняття, як *область визначення, область значень, нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання та спадання* функції.

Наприклад, для функції $y = x^2 + 2x$, графік якої зображено на рисунку 1.1, маємо:

- область визначення: $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- область значень: $E(y) = [-1; +\infty)$;
- нулі: числа -2 і 0;

- проміжки знакосталості: функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $(-\infty;\ -2)$ і $(0;\ +\infty)$, а від'ємних значень — на проміжку $(-2;\ 0)$;
- проміжки зростання та спадання: функція спадає на проміжку $(-\infty;\ -1]$ і зростає на проміжку $[-1;\ +\infty)$.

Наведений вище перелік аж ніяк не вичерпує тих властивостей, які доцільно вивчати під час дослідження функції. Розглянемо нові поняття, які допомагають детальніше охарактеризувати функцію.

Означення. **Число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.**

Позначають: $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Означення. **Число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.**

Позначають: $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для функції $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0;\ 4]$ маємо (рис. 1.2): $\min\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;\,4]} f(x) = f(4) = 2$.

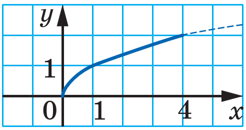


Рис. 1.2

Для функції $f(x) = x^2$ і множини $M = [-1;\ 2]$ маємо (рис. 1.3): $\min\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;\,2]} f(x) = f(2) = 4$.

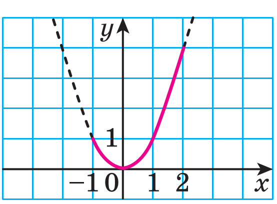


Рис. 1.3

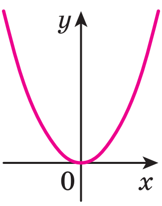


Рис. 1.4

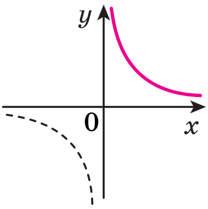


Рис. 1.5

Не будь-яка функція на заданій множині має найменше або найбільше значення. Так, для функції $f(x) = x^2$ маємо: $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Найбільшого значення на множині дійсних чисел ця функція не має (рис. 1.4).

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множині $(0;\ +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень (рис. 1.5).

Означення. **Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.**

Означення. **Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.**

Наприклад, функція $f(x) = x^2$ є парною, а функція $g(x) = x^3$ — непарною. Справді, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ і $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f є симетричною відносно початку координат, тобто має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$.

З наведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути ні парною, ні непарною.

Наприклад, областю визначення функції $y = \frac{1}{x-1}$ є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, яка не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є ні парною, ні непарною.

Задача. Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною.

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x).$$

Отже, функція f є непарною. ◄

Теорема 1.1. ***Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.***

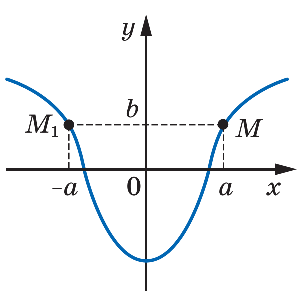


Рис. 1.6

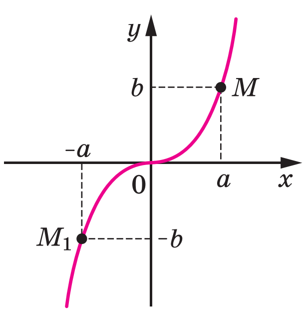


Рис. 1.7

Теорема 1.2. ***Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.***

Твердження теорем 1.1 і 1.2 проілюстровано на рисунках 1.6 і 1.7 відповідно.

?

1. Яке число називають найбільшим (найменшим) значенням функції на множині?
2. Як позначають найбільше (найменше) значення функції f на множині M?
3. Яку функцію називають парною (непарною)?
4. Яку властивість має графік парної (непарної) функції?

ВПРАВИ

1.1.° На рисунку 1.8 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть найбільше і найменше значення функції на проміжку:
1) $[1; 2]$; 2) $[-2{,}5; 1]$; 3) $[-2{,}5; 3{,}5]$.

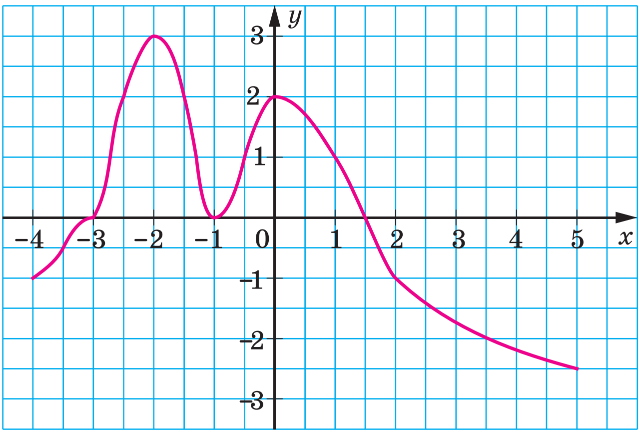


Рис. 1.8

1.2.° На рисунку 1.9 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть найбільше і найменше значення функції на проміжку:
1) $[-3; -2]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $[-3; 1]$.

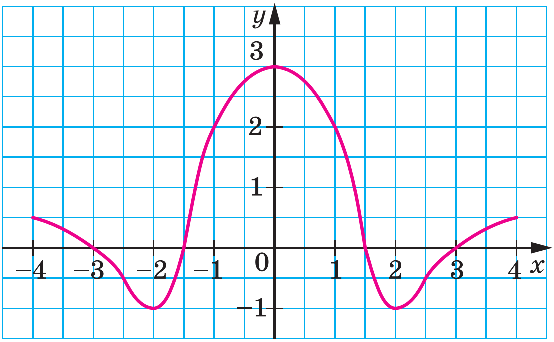


Рис. 1.9

1.3.° Відомо, що $f(7) = -16$. Знайдіть $f(-7)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

1.4.° Відомо, що $f(-3) = 8$. Знайдіть $f(3)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

1.5.° Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:
1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$?

1.6.° Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:
1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\,f(-2) = 3$?

1.7.° Чи є парною функція, задана формулою $y = x^2$, якщо її областю визначення є множина:
1) $[-9; 9]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-6; 6)$; 4) $(-\infty; 4]$?

1.8.° Парною чи непарною є функція, графік якої зображено на рисунку 1.10?

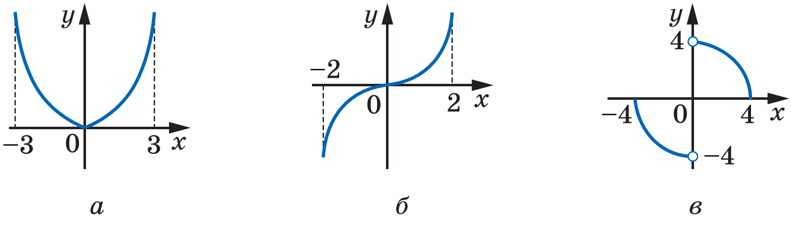


Рис. 1.10

1.9.• На проміжку [2; 5] знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x) = -\dfrac{10}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{20}{x}$.

1.10.$^{\bullet}$ Знайдіть:

1) $\max\limits_{[1;\,2]}(-x^2+6x)$;

2) $\min\limits_{[1;\,4]}(-x^2+6x)$;

3) $\max\limits_{[4;\,5]}(-x^2+6x)$.

1.11.$^{\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=x^2+2x-8$ на проміжку:

1) $[-5;\ -2]$;

2) $[-5;\ 1]$; 3) $[0;\ 3]$.

1.12.$^{\bullet}$ Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x)=-5x^4$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

1.13.$^{\bullet}$ Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x)=x^6$;

2) $f(x)=\sqrt{5-x^2}$.

1.14.$^{\bullet}$ Доведіть, що є непарною функція:

1) $f(x)=4x^7$;

2) $f(x)=2x-3x^5$.

1.15.$^{\bullet}$ Доведіть, що є непарною функція:

1) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$;

2) $f(x)=(x^3+x)(x^4-x^2)$.

1.16.$^{\bullet\bullet}$ Сума двох чисел дорівнює 8. Знайдіть:

1) найбільше значення, якого може набувати добуток цих чисел;

2) найменше значення, якого може набувати сума квадратів цих чисел.

1.17.$^{\bullet\bullet}$ Ділянку землі прямокутної форми обгородили парканом завдовжки 200 м. Яку найбільшу площу може мати ця ділянка?

1.18.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$;

2) $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$;

3) $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^3-x}$.

1.19.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x)=x^2+2x-4$;

2) $f(x)=\dfrac{6x^3}{x^2-9}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$.

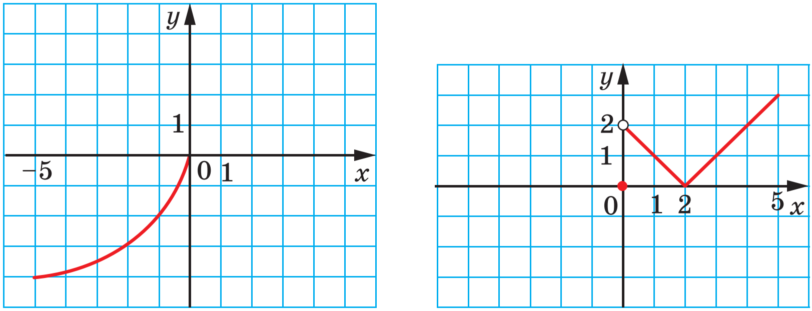
1.20.$^{\bullet\bullet}$ На рисунку 1.11 зображено частину графіка функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-5;\ 5]$. Добудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

1.21.$^{\bullet\bullet}$ Ламана $ABCD$, де $A\,(0;\ 0)$, $B\,(2;\ -2)$, $C\,(3;\ 4)$, $D\,(6;\ 1)$, є частиною графіка функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-6;\ 6]$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є:

1) парною;

2) непарною.

1.22.$^{\bullet\bullet}$ Функція f є парною і $\min\limits_{[1;\,3]}f(x)=2$, $\max\limits_{[1;\,3]}f(x)=5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;\,-1]}f(x)$, $\max\limits_{[-3;\,-1]}f(x)$.



а *б*

Рис. 1.11

1.23.•• Функція f є непарною і $\min\limits_{[2;5]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[2;5]} f(x) = 3$. Знайдіть $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)$.

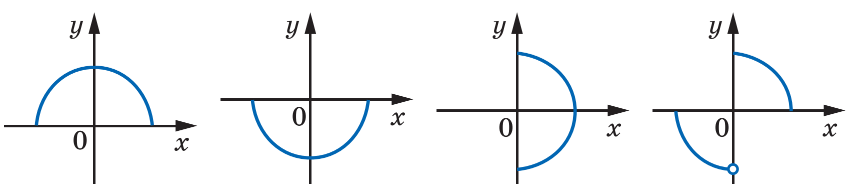
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1.24. Функцію задано формулою $f(x) = -3x^2 + 2x$.

1) Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$.

2) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції f дорівнює: 0; −1; −56.

1.25. Укажіть на рисунку 1.12 фігуру, яка не може слугувати графіком функції.



а *б* *в* *г*

Рис. 1.12

1.26. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \dfrac{9}{x+4}$;

2) $f(x) = \dfrac{x-6}{4}$;

3) $f(x) = \sqrt{x-7}$;

4) $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{-x-1}}$;

5) $f(x) = \sqrt{x^2+6x-7}$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x}$;

7) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$;

8) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

1.27. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = 0{,}4x - 8$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2+x-30}{x+5}$.

1.28. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 2$; 2) $f(x) = 7 - x^2$; 3) $f(x) = -6$.

2. Степенева функція з натуральним показником

Властивості та графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре відомі вам з курсу математики попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником.**

Оскільки вираз x^n, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

• **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 8 класу.

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geqslant 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина* $[0; +\infty)$.

Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$*, де* n *— парне натуральне число.*

Функція $y = x^n$*, де* n *— парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Отже, *функція* $y = x^n$*, де* n *— парне натуральне число*, *спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція *зростає на проміжку* $[0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 2.1). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 2.2.

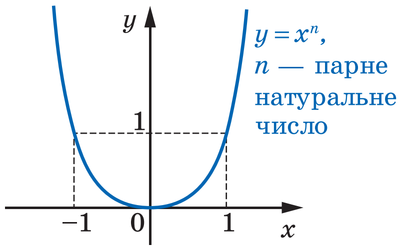


Рис. 2.1

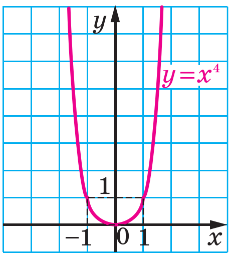


Рис. 2.2

• **Другий випадок:** $n = 2k + 1$**,** $k \in \mathbb{N}$ **або** $k = 0$

Зазначимо, що при $k = 0$ отримуємо функцію $y = x$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 7 класу.

Тепер нехай $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x, що $x^{2k+1} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число, є множина* $\mathbb{R}$.

Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число.*

Функція $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Отже, *функція* $y = x^n$, *де* n *— непарне натуральне число*, *є зростаючою*.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 2.3). Зокрема, графік функції $y = x^3$ зображено на рисунку 2.4.

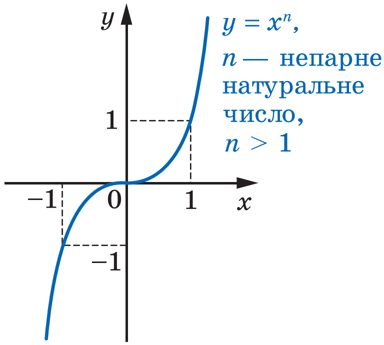


Рис. 2.3

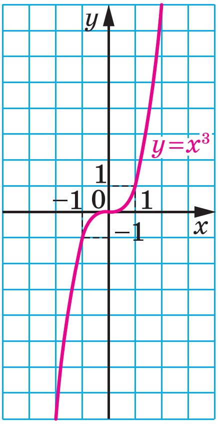


Рис. 2.4

У таблиці наведено властивості функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, установлені в цьому пункті.

Властивість	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$	Зростаюча

1. Яку функцію називають степеневою функцією з натуральним показником?
2. Сформулюйте властивості функції $y = x^n$.
3. Зобразіть схематично графік функції $y = x^n$.

ВПРАВИ

2.1.° Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^5$:
1) $A(-1;\ 1)$; 2) $B(2;\ 32)$; 3) $C(-3;\ -243)$?

2.2.° Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^4$:
1) $A(2;\ 16)$; 2) $B\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{81}\right)$; 3) $C(0,5;\ -0,0625)$?

2.3.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте:
1) $f(1,4)$ і $f(1,8)$; 3) $f(-6,9)$ і $f(6,9)$;
2) $f(-7,6)$ і $f(-8,5)$; 4) $f(0,2)$ і $f(-12)$.

2.4.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{50}$. Порівняйте:
1) $f(9,2)$ і $f(8,5)$; 3) $f(19)$ і $f(-19)$;
2) $f(-1,1)$ і $f(-1,2)$; 4) $f(-7)$ і $f(9)$.

2.5.• Розташуйте вирази в порядку спадання їхніх значень:

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^5,\ \left(-2\frac{1}{3}\right)^5,\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5,\ \left(-2\frac{2}{5}\right)^5.$$

2.6.• Розташуйте вирази в порядку зростання їхніх значень:

$$(1,06)^4,\ (-0,48)^4,\ (-2,12)^4,\ (-3,25)^4.$$

2.7.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку:
1) $[0;\ 2]$; 2) $[-2;\ -1]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $(-\infty;\ -2]$.

2.8.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^5$ на проміжку:
1) $[-3;\ 3]$; 2) $[-2;\ 0]$; 3) $[1;\ +\infty)$.

2.9.•• Установіть графічно кількість коренів рівняння:
1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0,5x - 2$.

2.10.•• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

2.11.* Скільки коренів залежно від значення a має рівняння:
1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

2.12. Обчисліть значення виразу:

1) $3^{-1}-4^{-1}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}+(-2{,}3)^{0}-5^{-2}$; 5) $0{,}5^{-2}\cdot 4^{-1}$;

2) $2^{-3}+6^{-2}$; 4) $9\cdot 0{,}1^{-1}$; 6) $(2^{-1}-8^{-1}\cdot 16)^{-1}$.

2.13. Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $a^{-2}+a^{-3}$; 2) $mn^{-4}+m^{-4}n$; 3) $(c^{-1}-d^{-1})(c-d)^{-2}$.

3. Степенева функція із цілим показником

Функцію, яку можна задати формулою $y=x^{n}$, де $n\in\mathbb{Z}$, називають **степеневою функцією із цілим показником.**

Властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто в попередньому пункті. Тут ми розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y=x^{0}$ є множина $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 3.1.

Розглянемо функцію $y=x^{-n}$, де $n\in\mathbb{N}$.

Окремий випадок цієї функції, коли $n=1$, тобто функція $y=\frac{1}{x}$, відомий вам з курсу алгебри 8 класу.

Запишемо функцію $y=x^{-n}$ у вигляді $y=\frac{1}{x^{n}}$. Тоді стає зрозуміло, що *областю визначення функції* $y=x^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$, *є множина* $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

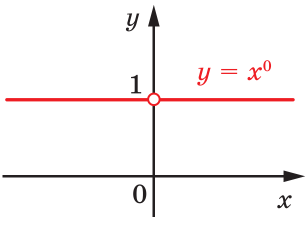


Рис. 3.1

Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y=x^{-n}$, де $n\in\mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$.**

Маємо: $x^{-2k}=\frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять від'ємні числа, а також число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-2k} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число, є множина* $(0; +\infty)$.

Оскільки для будь-якого $x \neq 0$ виконується нерівність $\frac{1}{x^{2k}} > 0$, то *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число*.

Функція $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число, є парною*. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (0; +\infty)$, $x_2 \in (0; +\infty)$ і $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} > 0$. Звідси $\left(\frac{1}{x_1}\right)^{2k} > \left(\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $x_1^{-2k} > x_2^{-2k}$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число*, *спадає на проміжку* $(0; +\infty)$.

Можна також показати, що *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число*, *зростає на проміжку* $(-\infty; 0)$.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля x значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стають усе меншими й меншими. Через це відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується зі збільшенням модуля абсциси точки та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Також можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі ординат зменшується та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 3.2). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 3.3.

• **Другий випадок: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.**

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-(2k-1)} = a$.

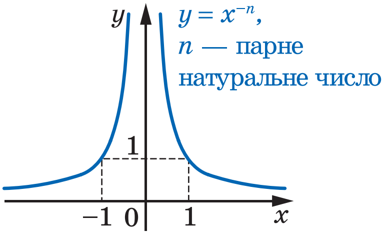


Рис. 3.2

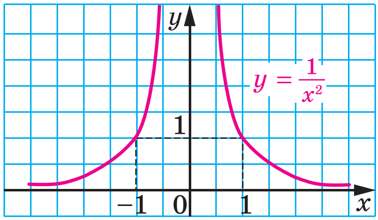


Рис. 3.3

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число*.

Функція $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, є непарною. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Можна показати, що *функція $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число (рис. 3.4). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^3}$ зображено на рисунку 3.5.

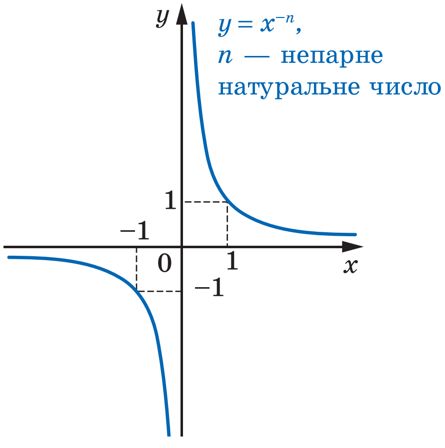


Рис. 3.4

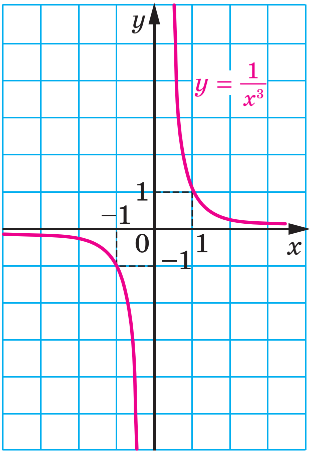


Рис. 3.5

У таблиці наведено властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, вивчені в цьому пункті.

Властивість	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нулі функції	—	—
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

1. Яку функцію називають степеневою функцією із цілим показником?
2. Яка фігура є графіком функції $y = x^0$?
3. Сформулюйте властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.
4. Зобразіть схематично графік функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

ВПРАВИ

3.1.° Чи проходить графік функції $y = x^{-4}$ через точку:

1) $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

3.2.° Чи проходить графік функції $y = x^{-5}$ через точку:

1) $A\ (0; 0)$; 2) $B\ (-1; -1)$; 3) $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$; 4) $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$?

3.3.• Дано функцію $f(x) = x^{-19}$. Порівняйте:

1) $f(1,6)$ і $f(2)$;
2) $f(-5,6)$ і $f(-6,5)$;
3) $f(-9,6)$ і $f(9,6)$;
4) $f(0,1)$ і $f(-10)$.

3.4.• Функцію задано формулою $f(x) = x^{-40}$. Порівняйте:

1) $f(6,2)$ і $f(5,5)$;
2) $f(-1,6)$ і $f(-1,7)$;
3) $f(24)$ і $f(-24)$;
4) $f(-8)$ і $f(6)$.

3.5.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$;
2) $y = ((x-2)^{-2})^{-2}$.

3.6.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-6}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;
2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$;
3) $[1; +\infty)$.

3.7.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$;
2) $[-2; -1]$;
3) $(-\infty; -3]$.

3.8.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = (x-2)^0$;
2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$.

3.9.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $(y+2)^0 = x - 2$;
2) $(y-2)^0 = (x+1)^0$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

3.10. Знайдіть значення виразу:

1) $5\sqrt{4} - \sqrt{25}$;
2) $\frac{1}{3}\sqrt{0,09} - 2$;
3) $\left(\sqrt{13}\right)^2 - 3 \cdot \left(\sqrt{8}\right)^2$.

3.11. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ і $\sqrt{\frac{1}{5}}$;
2) $\sqrt{33}$ і 6;
3) $\sqrt{30}$ і $2\sqrt{7}$.

4. Означення кореня n-го степеня

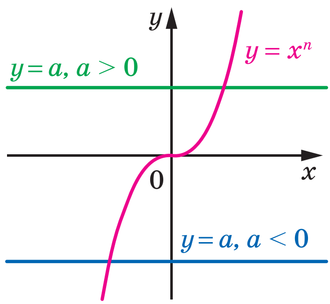
Ви знаєте, що коренем другого степеня (квадратним коренем) із числа a називають таке число, другий степінь якого дорівнює a. Аналогічно дають означення кореня n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Означення. Коренем n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

Наприклад, коренем п'ятого степеня із числа 32 є число 2, оскільки $2^5 = 32$; коренем третього степеня із числа -64 є число -4, оскільки $(-4)^3 = -64$; коренями четвертого степеня із числа 81 є числа 3 і -3, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

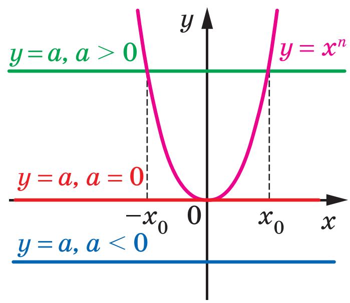
Якщо n — непарне натуральне число, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ при будь-якому a перетинаються в одній точці (рис. 4.1). Це означає, що рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому a. Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то з будь-якого числа існує корінь n-го степеня, причому тільки один.



n — непарне натуральне число, $n > 1$

Рис. 4.1



n — парне натуральне число

Рис. 4.2

Корінь непарного степеня n, $n > 1$, із числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь n-го степеня з a»). Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Знак $\sqrt[n]{}$ називають **знаком кореня n-го степеня** або **радикалом**. Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**.

Корінь третього степеня прийнято називати також **кубічним коренем**. Наприклад, запис $\sqrt[3]{2}$ читають: «кубічний корінь із числа 2».

Наголосимо, що вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, визначений при будь-якому a.

З означення кореня n-го степеня випливає, що ***при будь-якому a виконується рівність***

$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0,1}\right)^7 = -0,1$.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число.

З рисунка 4.2 видно: якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їхні абсциси — протилежні числа. Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — парне натуральне число, то при a < 0 корінь n-го степеня із числа a не існує; при a = 0 корінь n-го степеня із числа a дорівнює 0; при a > 0 існують два протилежних числа, кожне з яких є коренем n-го степеня із числа a.

Ви знаєте, що арифметичним квадратним коренем з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, другий степінь якого дорівнює a. Аналогічно дають означення арифметичного кореня n-го степеня.

Означення. Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Арифметичний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geqslant 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^{10} = 0$.

Узагалі, **якщо $b \geqslant 0$ і $b^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.**

За допомогою знака кореня n-го степеня можна записувати корені рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Наприклад, коренем рівняння $x^3 = 7$ є єдине число $\sqrt[3]{7}$; коренями рівняння $x^4 = 5$ є два числа: $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$.

З означення арифметичного кореня n-го степеня випливає, що:

1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, **де** $a \geqslant 0$ (наприклад, $\sqrt[4]{7} \geqslant 0$);

2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, **де** $a \geqslant 0$ (наприклад, $\left(\sqrt[6]{5}\right)^6 = 5$);

3) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$ (наприклад, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$).

Вище було встановлено, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує та набуває єдиного значення. Отже, кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Зазначене правило задає функцію $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, де $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $\mathbb{R}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 4.3. На рисунку 4.4 зображено графік функції $y = \sqrt[3]{x}$.

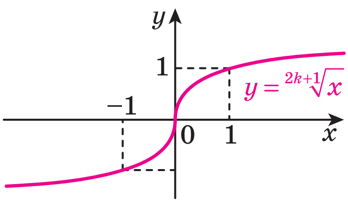


Рис. 4.3

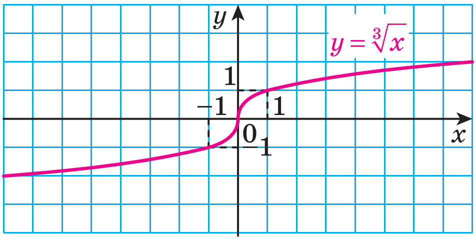


Рис. 4.4

Аналогічно означають функцію $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$. Областю визначення цієї функції є проміжок $[0; +\infty)$.

На рисунку 4.5 зображено графік функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, а на рисунку 4.6 — графік функції $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

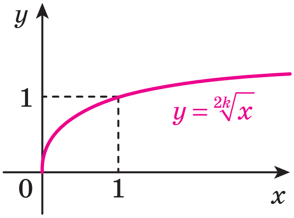


Рис. 4.5

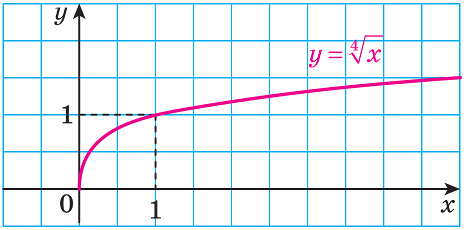


Рис. 4.6

У таблиці наведено властивості функції $y = \sqrt[n]{x}$.

Властивість	n — непарне натуральне число, $n > 1$	n — парне натуральне число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$	$[0; +\infty)$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$	$y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Непарна	Не є ні парною, ні непарною
Зростання / спадання	Зростаюча	Зростаюча

Задача. Розв'яжіть нерівність: 1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$.

Розв'язання. 1) Дану нерівність перепишемо таким чином: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Оскільки функція $y = \sqrt[3]{x}$ є зростаючою, то можна зробити висновок, що $x < 8$.

Відповідь: $(-\infty; 8)$.

2) Маємо: $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Оскільки функція $y = \sqrt[4]{t}$ є зростаючою та визначена на множині $[0; +\infty)$, то дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x - 2 < 1, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси $2 \leqslant x < 3$.

Відповідь: $[2; 3)$. ◄

1. Що називають коренем n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?

2. При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?

3. Що називають арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?

4. При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?

5. Сформулюйте властивості функції $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, та зобразіть схематично її графік.

6. Сформулюйте властивості функції $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, та зобразіть схематично її графік.

ВПРАВИ

4.1.° Чи має зміст запис:

1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[6]{0}$; 5) $\sqrt[6]{-1}$?

4.2.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 2) $\sqrt[3]{343} = -3$?

4.3.° Доведіть, що:

1) число 2 є арифметичним кубічним коренем із числа 8;
2) число 3 є арифметичним коренем четвертого степеня із числа 81;
3) число -3 не є арифметичним коренем четвертого степеня із числа 81.

4.4.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{216}$; 2) $\sqrt[4]{0{,}0016}$; 3) $\sqrt[5]{-0{,}00001}$; 4) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$.

4.5.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{343}$; 2) $0{,}5\sqrt[3]{-64}$; 3) $-\sqrt[5]{-1024}$?

4.6.° Обчисліть:

1) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 2) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 3) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 4) $\left(-2\sqrt[7]{-5}\right)^7$.

4.7.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$.

4.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = 27$; 4) $x^4 = 16$; 7) $27x^3 - 1 = 0$;
2) $x^5 = 9$; 5) $x^6 = 5$; 8) $(x-2)^3 = 125$;
3) $x^7 = -2$; 6) $x^4 = -81$; 9) $(x+5)^4 = 10\ 000$.

4.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^9 = 1$; 3) $x^{18} = 0$; 5) $64x^5 + 2 = 0$;
2) $x^{10} = 1$; 4) $x^6 = -64$; 6) $(x-3)^6 = 729$.

4.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}$; 3) $\sqrt[3]{x} = -6$; 5) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = 3$; 4) $\sqrt[6]{x} = -2$; 6) $\sqrt[3]{2x+7} = 0$.

4.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[5]{x} = -2$; 5) $\sqrt[4]{3x-2} = 0$;
2) $\sqrt[4]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{3x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[4]{3x-2} = 2$.

4.12.• Обчисліть: $0{,}3\sqrt[3]{1000} - 5\sqrt[8]{256} + 6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$.

4.13.• Обчисліть: $200\sqrt[3]{0{,}001} - \sqrt[5]{-0{,}00032} - \left(-4\sqrt{2}\right)^2$.

4.14.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[3]{x-1}$; 2) $y = \sqrt[6]{x+1}$; 3) $y = \sqrt[4]{x^2 - x - 2}$.

4.15.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[4]{2-x}$; 2) $y = \sqrt[9]{\frac{x+1}{x-3}}$; 3) $y = \sqrt[6]{x^2 - 4x + 3}$.

4.16.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{21}$; 3) $\sqrt[3]{100}$; 4) $-\sqrt[3]{81}$?

4.17.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

4.18.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[5]{x} > 3$; 2) $\sqrt[6]{x-3} < 2$; 3) $\sqrt[4]{x+1} > 1$.

4.19.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

4.20.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 - 4)\sqrt[4]{x+1} = 0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2 - 2x - 3} = 0$.

4.21.•• Розв'яжіть рівняння $(x+2)\sqrt[6]{x^2 + 2x - 3} = 0$.

4.22.•• Побудуйте графік функції $y = \left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4 + 1$.

4.23.•• Побудуйте графік функції $y = \left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8 + \left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

4.24. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}64 \cdot 36}$; 2) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt{\frac{81}{100}}$.

4.25. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$; 3) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$.

5. Властивості кореня n-го степеня

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня n-го степеня.

Теорема 5.1 (перша теорема про корінь із степеня). ***Для будь-якого*** $a \in \mathbb{R}$ ***і*** $k \in \mathbb{N}$ ***виконуються рівності:***

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a,$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

Доведення. Щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достатньо показати, що $y^{2k+1} = x$. Для першої рівності, що доводиться, $x = a^{2k+1}$, а $y = a$. Звідси рівність $y^{2k+1} = x$ є очевидною.

Щоб довести рівність $\sqrt[2k]{x} = y$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^{2k} = x$. Для другої рівності, що доводиться, маємо: $|a| \geqslant 0$ і $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ◄

Теорема 5.2 (корінь із добутку). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt[n]{x} = y$, де $x \geqslant 0$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^n = x$.

Маємо: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ і $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$. ◄

Теорема 5.3 (корінь із частки). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Теорема 5.4 (степінь кореня). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною. Нехай $k > 1$.

Маємо: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множників}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множників}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ◄

Теорема 5.5 (корінь із кореня). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, ***то***

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Доведення. Маємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ◄

Теорема 5.6 (друга теорема про корінь із степеня). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}.$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ◄

Задача 1. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{(-7,3)^4}$; 2) $\sqrt[6]{1,2^{12}}$; 3) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$.

Розв'язання. 1) Скориставшись теоремою 5.1, можна записати: $\sqrt[4]{(-7,3)^4}=|-7,3|=7,3.$

2) $\sqrt[6]{1,2^{12}}=1,2^2=1,44.$

3) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, отримаємо:

$$\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{16\cdot 2}=\sqrt[5]{32}=2.$$

4) Замінивши частку коренів коренем із частки, матимемо:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}=\sqrt[3]{\frac{24}{375}}=\sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{2}{5}.$$ ◄

Задача 2. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{a^{28}}$; 2) $\sqrt[6]{64a^{18}}$, якщо $a\leqslant 0$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[6]{a^2}$.

Розв'язання. 1) Застосувавши теорему 5.1, отримаємо: $\sqrt[4]{a^{28}}=\sqrt[4]{(a^7)^4}=|a^7|.$

2) Маємо: $\sqrt[6]{64a^{18}}=2|a^3|$. Оскільки за умовою $a\leqslant 0$, то $a^3\leqslant 0$. Тоді $\sqrt[6]{64a^{18}}=2|a^3|=-2a^3$.

3) $\sqrt[12]{a^3}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}}=\sqrt[4]{a}.$

4) $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}=\sqrt[3]{|a|}.$ ◄

Задача 3. Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt[3]{250}$; 2) $\sqrt[8]{b^{43}}$.

Розв'язання. 1) Подамо число, яке стоїть під знаком кореня, у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є кубом раціонального числа, і винесемо множник з-під знака кореня:

$$\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{125\cdot 2}=5\sqrt[3]{2}.$$

2) З умови випливає, що $b\geqslant 0$.

Тоді $\sqrt[8]{b^{43}}=\sqrt[8]{b^{40}b^3}=|b^5|\sqrt[8]{b^3}=b^5\sqrt[8]{b^3}.$ ◄

Задача 4. Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $c\sqrt[10]{c^7}$.

Розв'язання. 1) $-2\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{64}\cdot\sqrt[6]{3}=-\sqrt[6]{192}.$

2) З умови випливає, що $c\geqslant 0$.

Тоді $c\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{10}}\cdot\sqrt[10]{c^7}=\sqrt[10]{c^{17}}.$ ◄

Задача 5. Скоротіть дріб $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

Розв'язання. Розклавши чисельник і знаменник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}=\frac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}. \blacktriangleleft$$

1. Сформулюйте першу теорему про корінь із степеня.
2. Сформулюйте теорему про корінь із добутку.
3. Сформулюйте теорему про корінь із частки.
4. Сформулюйте теорему про степінь кореня.
5. Сформулюйте теорему про корінь із кореня.
6. Сформулюйте другу теорему про корінь із степеня.

ВПРАВИ

5.1.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{64\cdot 125}$; 2) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 7^5}$; 3) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12}\cdot 11^4}{5^8\cdot 2^{16}}}$.

5.2.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{0{,}064\cdot 343}$; 2) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$; 3) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24}\cdot 3^{16}}{5^{16}}}$.

5.3.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 3) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 5) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}054}\cdot\sqrt[3]{4}$; 4) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30}\cdot 7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6\cdot 7^4}}$; 6) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{-9}$.

5.4.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 3) $\sqrt[7]{2^{15}\cdot 5^3}\cdot\sqrt[7]{2^6\cdot 5^4}$; 5) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[6]{3^{10}\cdot 10^2}}{\sqrt[6]{10^8\cdot 3^4}}$; 6) $\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}$.

5.5.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$; 2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$; 3) $\sqrt[15]{c^6}$; 4) $\sqrt[18]{a^8b^{24}}$.

5.6.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[21]{a^{14}b^7}$.

5.7.• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{16}$; 2) $\sqrt[4]{162}$; 3) $\sqrt[3]{250}$; 4) $\sqrt[3]{40a^5}$; 5) $\sqrt[3]{-a^7}$.

5.8.• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$.

5.9.• Внесіть множник під знак кореня:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $4\sqrt[3]{5}$; 3) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 4) $b\sqrt[5]{3b^3}$; 5) $c\sqrt[3]{\dfrac{5}{c^2}}$.

5.10.• Внесіть множник під знак кореня:

1) $\dfrac{1}{4}\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{\dfrac{x^3}{8}}$.

5.11.• Замініть вираз $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$ на тотожно рівний йому.

5.12.• Спростіть вираз $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{2000}$.

5.13.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$; 3) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

5.14.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

5.15.• Спростіть вираз:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

5.16.• Спростіть вираз $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}\right)$.

5.17.• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{a^4}=a$; 2) $\sqrt[4]{a^4}=-a$; 3) $\sqrt[3]{a^3}=a$; 4) $\sqrt[3]{a^3}=-a$?

5.18.•• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[6]{a^{30}}=a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}}=-a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4}=\left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

5.19.•• При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ab}=\sqrt[4]{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}$; 3) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[5]{b}$;

2) $\sqrt[4]{-ab}=\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{-b}$; 4) $\sqrt[5]{ab}=\sqrt[5]{-a}\cdot\sqrt[5]{-b}$?

5.20.•• При яких значеннях x виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{x^2-4}=\sqrt[4]{x-2}\cdot\sqrt[4]{x+2}$;

2) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)}=\sqrt[3]{x-6}\cdot\sqrt[3]{x-10}$?

5.21.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, якщо $m \geqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{n^4}$, якщо $n \leqslant 0$;
3) $\sqrt[8]{256k^8}$, якщо $k \leqslant 0$;
4) $\sqrt[6]{c^{24}}$;
5) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$;
6) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, якщо $y \geqslant 0$.

5.22.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;
2) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leqslant 0$;
3) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, якщо $p \geqslant 0$.

5.23.•• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$;
2) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$;
3) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$;
4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$;
5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;
6) $\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}$.

5.24.•• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$;
2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$;
3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$;
4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$.

5.25.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4}=x+4$;
2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8}=(1-3x)^2$.

5.26.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{6}-2\right)^3}$;
2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$;
3) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}$.

5.27.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$;
2) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$;
3) $\sqrt[15]{\left(\sqrt{7}-3\right)^3}$.

5.28.•• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;
2) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, якщо $a > 0$.

5.29.•• Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, якщо $a \leqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{-625a^5}$.

5.30.•• Внесіть множник під знак кореня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, якщо $c \leqslant 0$;
2) $b\sqrt[6]{6}$;
3) $a\sqrt[6]{-a}$.

5.31.•• Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[6]{a}$;
2) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

5.32.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

5.33. Подайте у вигляді степеня з основою a вираз:

1) $\frac{(a^3)^6 \cdot a^4}{a^{16}}$;
3) $a^{-5} \cdot a^{10} \cdot a^{-12}$;
5) $a^{12} \cdot a^{-20} : a^{-9}$;
2) $a^5 \cdot a^{-8}$;
4) $a^{-3} : a^{-15}$;
6) $(a^{-5})^4$.

5.34. Знайдіть значення виразу:

1) $2^{-9} \cdot 2^{-12} : 2^{-22}$;
3) $\frac{14^{-5}}{7^{-5}}$;
5) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{-7} \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\right)^5$;
2) $3^{-3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;
4) $9^{-4} \cdot 27^2$;
6) $\frac{22^6 \cdot 2^{-8}}{44^{-3} \cdot 11^9}$.

6. Означення та властивості степеня з раціональним показником

У 7 класі ви дізналися, що степінь з натуральним показником має такі властивості:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$, $m > n$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n b^n$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Пізніше ви ознайомилися з означеннями степеня з нульовим показником і степеня із цілим від'ємним показником:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$;

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ці означення дуже вдалі: при такому підході всі п'ять властивостей степеня з натуральним показником залишилися справедливими й для степеня із цілим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником, тобто степеня a^r, показник якого є раціональним числом виду $r = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Бажано зробити це так, щоб степінь із дробовим показником мав усі властивості степеня із цілим показником. Підказкою для потрібного означення може слугувати такий приклад.

Позначимо через x шукане значення степеня $2^{\frac{2}{3}}$, тобто $x = 2^{\frac{2}{3}}$. Ураховуючи властивість $(a^m)^n = a^{mn}$, можемо записати: $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Отже, x — це кубічний корінь із числа 2^2, тобто $x = \sqrt[3]{2^2}$. Таким чином, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ці міркування підказують, що доцільно прийняти таке означення.

Означення. Степенем додатного числа a з раціональним показником r, поданим у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Наприклад, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Зауважимо, що значення степеня a^r, де r — раціональне число, не залежить від того, у вигляді якого дробу подано число r. Це можна показати, використовуючи рівності $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь з основою, яка дорівнює нулю, означають тільки для додатного раціонального показника.

Означення. $0^{\frac{m}{n}} = 0$**, де** $m \in \mathbb{N}$**,** $n \in \mathbb{N}$**.**

Звертаємо увагу, що, наприклад, запис $0^{-\frac{1}{2}}$ не має змісту.

Наголосимо, що в означеннях не йдеться про степінь $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, наприклад, вираз $(-2)^{\frac{1}{3}}$ залишився невизначеним. Разом з тим вираз $\sqrt[3]{-2}$ має зміст. Виникає природне запитання: чому б не вважати, що $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажемо, що така домовленість призвела б до суперечності:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Отримали, що від'ємне число $\sqrt[3]{-2}$ «дорівнює» додатному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають **степеневою функцією з раціональним показником.**

Якщо нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є числом додатним, то областю визначення функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ є проміжок $[0; +\infty)$; а якщо цей дріб — від'ємне число, то проміжок $(0; +\infty)$.

На рисунку 6.1 зображено графіки функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

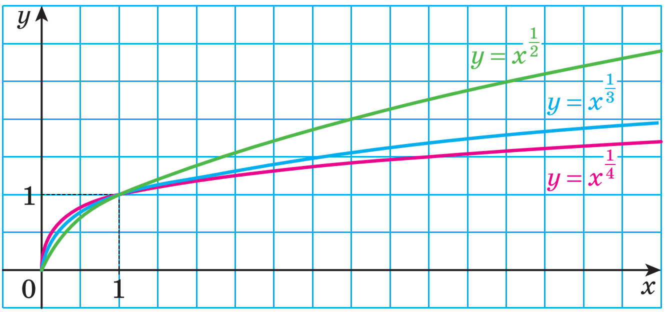


Рис. 6.1

Покажемо, що властивості степеня із цілим показником залишаються справедливими і для степеня з довільним раціональним показником.

Теорема 6.1 (добуток степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Доведення. Запишемо раціональні числа p і q у вигляді дробів з однаковими знаменниками: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Маємо:

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. \blacktriangleleft$$

Наслідок. ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-якого раціонального числа p виконується рівність***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 6.1, запишемо: $a^{-p} \cdot a^{p} = a^{-p+p} = a^{0} = 1$. Звідси $a^{-p} = \dfrac{1}{a^{p}}$. ◀

Теорема 6.2 (частка степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^{p} : a^{q} = a^{p-q}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 6.1, запишемо: $a^{q} \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^{p}$. Звідси $a^{p-q} = a^{p} : a^{q}$. ◀

Теорема 6.3 (степінь степеня). ***Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{(a^{p})^{q} = a^{pq}}$$

Доведення. Нехай $p = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, і $q = \dfrac{s}{k}$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Маємо:

$$(a^{p})^{q} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{s}} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^{m}}\right)^{s}} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} = \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{k}} = a^{pq}. \text{ ◀}$$

Теорема 6.4 (степінь добутку та степінь частки). ***Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності:***

$$\boxed{(ab)^{p} = a^{p}b^{p}}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \frac{a^{p}}{b^{p}}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

Задача 1. Спростіть вираз

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})\,(a^{0,3} - 2b^{0,2}).$$

Розв'язання. Розкриємо дужки, використовуючи правило множення многочленів і формулу різниці квадратів, а потім зведемо подібні доданки:

$$(3a^{0,3} + b^{0,2})(a^{0,3} - 4b^{0,2}) - (a^{0,3} + 2b^{0,2})(a^{0,3} - 2b^{0,2}) =$$
$$= \underline{3a^{0,6}} - \underline{\underline{12a^{0,3}b^{0,2}}} + \underline{\underline{a^{0,3}b^{0,2}}} - 4b^{0,4} - \underline{a^{0,6}} + 4b^{0,4} = 2a^{0,6} - 11a^{0,3}b^{0,2}. \text{ ◀}$$

Задача 2. Спростіть вираз $\dfrac{x^{\frac{1}{3}} + 2}{x^{\frac{1}{3}} - 2} - \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}} + 2} - \dfrac{16}{x^{\frac{2}{3}} - 4}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x^{\frac{1}{3}} = y$. Тоді даний вираз набуває такого вигляду:

$$\frac{y+2}{y-2} - \frac{y-2}{y+2} - \frac{16}{y^2-4}.$$

Цей вираз легко спростити. Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\frac{8}{x^{\frac{1}{3}}+2}$. ◄

1. Що називають степенем додатного числа a з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?

2. Що називають степенем числа 0 з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$?

3. Яку функцію називають степеневою функцією з раціональним показником?

4. Сформулюйте властивості степеня з раціональним показником.

ВПРАВИ

6.1.° Подайте у вигляді кореня степінь із дробовим показником:

1) $5^{\frac{1}{3}}$; 2) $b^{-\frac{1}{7}}$; 3) $(ab)^{\frac{4}{7}}$.

6.2.° Подайте у вигляді кореня степінь із дробовим показником:

1) $3^{-\frac{1}{9}}$; 2) $c^{0,2}$; 3) $x^{\frac{6}{7}}$.

6.3.° Подайте вираз у вигляді степеня з дробовим показником:

1) $\sqrt{x}$; 2) $\sqrt[7]{6^5}$; 3) $\sqrt[5]{2^{-2}}$.

6.4.° Подайте вираз у вигляді степеня з дробовим показником:

1) $\sqrt[7]{a^3}$; 2) $\sqrt[14]{m^{-9}}$; 3) $\sqrt[6]{5a^5}$.

6.5.° Знайдіть значення виразу:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 \cdot 64^{-\frac{1}{3}}$; 5) $27^{\frac{4}{3}}$;

2) $25^{-\frac{1}{2}}$; 4) $-5 \cdot 0{,}01^{-\frac{3}{2}}$; 6) $32^{-0,2}$.

6.6.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

6.7.° Знайдіть значення виразу:

1) $3^{1,8}\cdot 3^{-2,6}\cdot 3^{2,8}$;
3) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$;
5) $\left(\frac{5}{6}\right)^{4,5}\cdot 1,2^{4,5}$;
2) $(5^{-0,8})^{6}\cdot 5^{4,8}$;
4) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$;
6) $\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$.

6.8.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $5^{3,4}\cdot 5^{-1,8}\cdot 5^{-2,6}$;
2) $(7^{-0,7})^{8} : 7^{-7,6}$;
3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$;
4) $\frac{81^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$?

6.9.° Розкрийте дужки:

1) $2a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-4\right)+8a^{\frac{1}{2}}$;
4) $(b^{0,4}+3)^{2}-6b^{0,4}$;
2) $\left(3b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{3}{2}}\right)\left(3b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{3}{2}}\right)$;
5) $\left(c^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(c^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{3}}+1\right)$;
3) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^{2}$;
6) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{5}{6}}+a\right)$.

6.10.° Розкрийте дужки:

1) $(5a^{0,4}+b^{0,2})(3a^{0,4}-4b^{0,2})$;
4) $\left(x^{\frac{1}{6}}+2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+4\right)$;
2) $(m^{0,5}+n^{0,5})(m^{0,5}-n^{0,5})$;
5) $(y^{1,5}-4y^{0,5})^{2}+8y^{2}$;
3) $\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$;
6) $\left(a^{\frac{1}{8}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{8}}+1\right)$.

6.11.• Обчисліть значення виразу:

1) $12^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot (0,5)^{\frac{1}{3}}$;
3) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot (0,81)^{-0,5}$;
2) $25^{1,5}+(0,25)^{-0,5}-81^{0,75}$;
4) $16^{\frac{1}{8}}\cdot 8^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{1,5}$.

6.12.• Знайдіть значення виразу:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;
3) $0,0016^{-\frac{3}{4}}-0,04^{-\frac{1}{2}}+0,216^{-\frac{2}{3}}$;
2) $10^{\frac{1}{4}}\cdot 40^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}$;
4) $625^{-1,25}\cdot 25^{1,5}\cdot 125^{\frac{2}{3}}$.

6.13.• Скоротіть дріб:

1) $\frac{a-5a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-5}$;
2) $\frac{a-4b}{a^{0,5}+2b^{0,5}}$;
3) $\frac{a-b}{ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b}$;

4) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$; 5) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 6) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}$.

6.14.• Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a+2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2}$; 3) $\dfrac{a-b^2}{a-a^{\frac{1}{2}}b}$; 5) $\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a-b}$;

2) $\dfrac{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{1}{4}}-m^{\frac{1}{4}}n^{\frac{5}{4}}}{m^{\frac{5}{4}}n^{\frac{5}{4}}}$; 4) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$; 6) $\dfrac{a-125}{a^{\frac{2}{3}}-25}$.

6.15.•• Спростіть вираз $\dfrac{a-b}{a^{0,5}-b^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-b^{1,5}}{a-b}$.

6.16.•• Спростіть вираз $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}}$.

6.17.•• Доведіть тотожність $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a+2a^{0,5}+1}-\dfrac{a^{0,5}-2}{a-1}\right):\dfrac{a^{0,5}}{a^{0,5}+1}=\dfrac{2}{a-1}$.

6.18.•• Доведіть тотожність $\left(\dfrac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{m}{n}=n^{\frac{1}{2}}-m^{\frac{1}{2}}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

6.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3x-7}=0$; 3) $\sqrt{x^2-64}=6$; 5) $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=0$;

2) $\sqrt{4x-1}=6$; 4) $\sqrt{1+\sqrt{3+x}}=4$; 6) $(x-2)\sqrt{x+2}=0$.

7. Ірраціональні рівняння

Під час розв'язування рівнянь інколи виникає потреба піднести обидві частини рівняння до одного й того самого степеня. З'ясуємо, як це перетворення впливає на множину коренів даного рівняння.

Теорема 7.1. ***Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[7]{x^2-2}=\sqrt[7]{x}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до сьомого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння

$$\left(\sqrt[7]{x^2-2}\right)^7=\left(\sqrt[7]{x}\right)^7.$$

Звідси $x^2-2=x$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$.

Відповідь: -1; 2. ◀

Рівняння, яке ми розглянули в задачі 1, містить змінну під знаком кореня. Такі рівняння називають **ірраціональними**.

Ось ще приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt{x-3}=2;$$
$$\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}+1=0;$$
$$\sqrt{3-x}=\sqrt[3]{2+x}.$$

Під час розв'язування задачі 1 нам довелося перетворювати рівняння, яке містило корені непарного степеня. Розглянемо рівняння, що містить корені парного степеня.

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$. (1)

Розв'язання. Застосовуючи формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, замінимо дане рівняння таким:

$$3x+4=x-2. \quad (2)$$

Звідси $x=-3$.

Проте перевірка показує, що число -3 не є коренем початкового рівняння. Говорять, що число -3 є **стороннім коренем** рівняння (1).

Отже, рівняння (1) не має коренів.

Відповідь: коренів немає. ◀

Причина появи стороннього кореня під час розв'язування задачі 2 полягає в тому, що, застосувавши формулу $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, ми не взяли до уваги обмеження $a\geqslant 0$. Через це рівняння (2) виявилося не рівносильним рівнянню (1).

Означення. Якщо множина коренів рівняння $f_2(x)=g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, то рівняння $f_2(x)=g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x)=g_1(x)$.

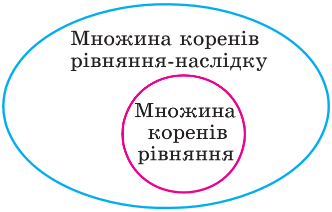


Рис. 7.1

Наприклад, рівняння $x^2=25$ є наслідком рівняння $x^2-\frac{1}{5-x}=25-\frac{1}{5-x}$. Переконайтеся в цьому самостійно.

Також говорять, що з рівняння $x^2-\frac{1}{5-x}=25-\frac{1}{5-x}$ **випливає** рівняння $x^2=25$.

На рисунку 7.1 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

Ще однією причиною появи сторонніх коренів є те, що з рівності $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ не обов'язково випливає рівність $x_1 = x_2$. Наприклад, $(-2)^4 = 2^4$, але $-2 \neq 2$. Водночас із рівності $x_1 = x_2$ випливає рівність $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Справедливою є така теорема.

Теорема 7.2. ***При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного.***

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4+3x} = x$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата. Отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$$4 + 3x = x^2.$$

Звідси $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Перевірка показує, що число -1 — сторонній корінь, а число 4 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 4. ◄

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрата:

$$2x - 3 + 2\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} + 4x + 1 = 16.$$

Звідси $\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{4x+1} = 9 - 3x$.

Переходячи до рівняння-наслідку, отримуємо:

$$8x^2 - 10x - 3 = 81 - 54x + 9x^2;$$

$$x^2 - 44x + 84 = 0; \quad x_1 = 42, \ x_2 = 2.$$

Перевірка показує, що число 42 є стороннім коренем, а число 2 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 2. ◄

Задача 5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^3+1} + 2\sqrt[4]{x^3+1} - 3 = 0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[4]{x^3+1} = t$. Тоді $\sqrt{x^3+1} = t^2$. Тепер початкове рівняння набуває вигляду

$$t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Звідси $t = -3$ або $t = 1$.

У випадку, коли $t = -3$, отримуємо рівняння $\sqrt[4]{x^3+1} = -3$, яке не має розв'язків.

У випадку, коли $t = 1$, отримуємо рівняння $\sqrt[4]{x^3+1} = 1$. Закінчіть розв'язування самостійно.

Відповідь: 0. ◄

Нагадаємо, що метод, використаний під час розв'язування останнього рівняння, відомий вам ще з курсу алгебри 8–9 класів. Цей метод називають *методом заміни змінної*.

1. Яке рівняння називають ірраціональним?
2. Обидві частини рівняння піднесли до непарного степеня. Чи обов'язково початкове й отримане рівняння будуть рівносильними?
3. Обидві частини рівняння піднесли до парного степеня. Чи обов'язково початкове й отримане рівняння будуть рівносильними?
4. Як можна виявити сторонні корені рівняння?

ВПРАВИ

7.1.° Поясніть, чому не має коренів рівняння:

1) $\sqrt{x-2}+1=0$;
2) $\sqrt[6]{x}+\sqrt[8]{x-1}=-2$;
3) $\sqrt{x-4}+\sqrt{1-x}=5$;
4) $\sqrt[4]{x-6}+\sqrt{6-x}=1$.

7.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{2x-2}=2$;
2) $\sqrt[3]{x-4}=2$;
3) $\sqrt[5]{x-6}=-3$;
4) $\sqrt[3]{x^3-2x+3}=x$.

7.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x-3}=4$;
2) $\sqrt[3]{8x^3-x-15}=2x$;
3) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$.

7.4.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[7]{2x-1}=\sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$.

7.5.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5}=\sqrt{1-x}$.

7.6.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2-x}=x$;
2) $\sqrt{x+1}=x-1$;
3) $\sqrt{3x-2}=x$;
4) $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$;
5) $2\sqrt{x+5}=x+2$;
6) $\sqrt{15-3x}-1=x$.

7.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10-3x}=-x$;
2) $x=\sqrt{x+5}+1$;
3) $3\sqrt{x+10}-11=2x$;
4) $x-\sqrt{3x^2-11x-20}=5$.

7.8.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)} = x-4$; 2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)} + 2 = x$.

7.9.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\sqrt{(3x-1)(4x+3)} = 3x-1$.

7.10.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0$; 4) $2\sqrt{x+1} - 5 = \dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$;

2) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} - 6 = 0$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1} + \dfrac{3}{\sqrt[4]{x}+1} = 2$;

3) $2x - 7\sqrt{x} - 15 = 0$; 6) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}} + 7\sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}} = 8$.

7.11.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x - \sqrt{x} - 12 = 0$; 3) $\sqrt{x+5} - 3\sqrt[4]{x+5} + 2 = 0$;

2) $\sqrt[3]{x^2} + 8 = 9\sqrt[3]{x}$; 4) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}} + \sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}} = 2{,}5$.

7.12.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x+1$; 2) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2-24}} = x-1$.

7.13.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$; 3) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$;

2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = 1$; 4) $2\sqrt{2-x} - \sqrt{7-x} = 1$.

7.14.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{3x-5} = 2$; 2) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1} = 2$.

7.15.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3$; 3) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = 1$;

2) $\sqrt{x-7} + \sqrt{x-1} = 4$; 4) $\sqrt{13-4x} + \sqrt{x+3} = 5$.

7.16.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x+5} = 3$; 2) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} = 3$.

7.17.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2 - 5x + 16 - 3\sqrt{x^2 - 5x + 20} = 0$;

2) $x^2 + 4 - 5\sqrt{x^2 - 2} = 0$;

3) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$;

4) $\sqrt{3x^2 - 9x - 26} = 12 + 3x - x^2$.

7.18.•• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2 - 4x - 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} + 10 = 0$;

2) $2\sqrt{x^2 - 3x + 11} = 4 + 3x - x^2$;

3) $5x^2 + 10x + \sqrt{x^2 + 2x - 15} = 123$.

7.19.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}} = 6$.

7.20.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 6$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.21. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, \text{ якщо } x < 1, \\ x - 1, \quad \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$ Користуючись побудованим графіком, визначте проміжки зростання і спадання даної функції.

7.22. Задайте формулою лінійну функцію f, якщо $f(-2) = 5$, $f(2) = -3$.

ЛЬВІВСЬКА МАТЕМАТИЧНА ШКОЛА

Ви вивчаєте розділ «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення — «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста — математичний аналіз вивчає функції. Цього року ви починаєте ознайомлюватися з елементами аналізу: вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їхні властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. вивчення певних класів функцій привело до появи нової математичної дисципліни — функціонального аналізу. Важливу, фактично головну, роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30 рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його наукових закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юлій Шаудер, Гуґо Штейнгауз і багато інших. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії

Стефан Банах
(1892–1945)

Підручник Банаха «Курс функціонального аналізу»

множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як Львівська математична школа. Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

Сьогодні світова математична спільнота із цілковитою підставою вважає С. Банаха засновником функціонального аналізу. Один із перших у світі підручників із цієї дисципліни написав саме С. Банах. Багато результатів Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені вченим множини одержали назву «простори Банаха» й зараз входять до необхідного мінімуму знань усіх, хто навчається у вищому навчальному закладі з математики, фізики, кібернетики та ін.

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували то кухлі пива, то вечерю в ресторані. Наприклад, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Вручення гусака

Проблеми, порушені в «Шкотській книзі», є настільки важливими та складними, що кожний, кому вдається розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Найменше і найбільше значення функції

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, де $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині M і записують: $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$, де $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині M і записують: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Парна і непарна функції

Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x із області визначення $f(-x) = f(x)$.

Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x із області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.

Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.

Корінь n-го степеня

Коренем n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Для будь-якого a і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності: $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.

Для будь-якого $a \geqslant 0$ і $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$.

Якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Якщо $a \geqslant 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$.

Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

Степінь з раціональним показником

Степенем додатного числа a з показником $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;

$0^{\frac{m}{n}} = 0$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають степеневою функцією з раціональним показником.

Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконуються рівності: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$, $a^p : a^q = a^{p-q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$.

Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності: $(ab)^p = a^p b^p$, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Ірраціональні рівняння

Рівняння, які містять змінну під знаком кореня, називають ірраціональними.

Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримане рівняння є наслідком даного.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ §2

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви розширите свої знання про тригонометричні функції та їхні властивості; дізнаєтеся, що таке радіанна міра кута, які функції називають періодичними.

Ознайомитеся з формулами, які пов'язують різні тригонометричні функції, навчитеся застосовувати їх для виконання обчислень, спрощення виразів, доведення тотожностей.

Дізнаєтеся, які рівняння називають найпростішими тригонометричними рівняннями; ознайомитеся з формулами коренів найпростіших тригонометричних рівнянь.

8. Радіанна міра кутів

Досі для вимірювання кутів ви використовували градуси або частини градуса — мінути та секунди.

У багатьох випадках зручно користуватися іншою одиницею виміру кутів. Її називають **радіаном**.

Означення. Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

На рисунку 8.1 зображено центральний кут AOB, що спирається на дугу AB, довжина якої дорівнює радіусу кола. Величина кута AOB дорівнює одному радіану. Записують: $\angle AOB = 1$ рад. Також говорять, що радіанна міра дуги AB дорівнює одному радіану. Записують: $\cup AB = 1$ рад.

Радіанна міра кута (дуги) не залежить від радіуса кола. Це твердження проілюстровано на рисунку 8.2.

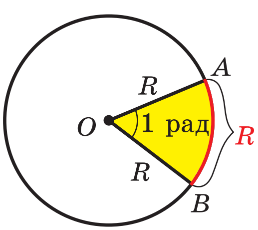


Рис. 8.1

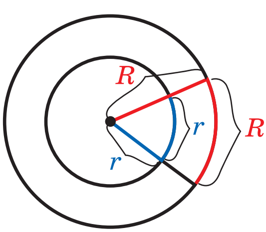


Рис. 8.2

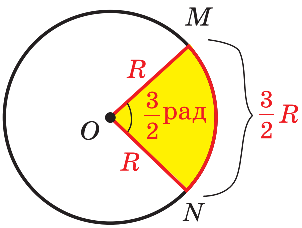


Рис. 8.3

На рисунку 8.3 зображено коло радіуса R і дугу MN, довжина якої дорівнює $\frac{3}{2}R$. Тоді радіанна міра кута MON (дуги MN) дорівнює $\frac{3}{2}$ рад. Узагалі, якщо центральний кут кола радіуса R спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR, то говорять, що **радіанна міра** цього центрального кута дорівнює α рад.

Довжина півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад. Градусна міра півкола становить 180°. Сказане дає змогу встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Звідси

$$\boxed{\mathbf{1\ рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3{,}14$), можна встановити: 1 рад ≈ 57°.

Якщо обидві частини рівності (1) поділити на 180, то отримаємо:

$$\boxed{\mathbf{1}^{\circ} = \frac{\pi}{\mathbf{180}}\ \mathbf{рад}} \qquad (2)$$

Із цієї рівності легко встановити, що, наприклад,

$$15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}, \quad 90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад},$$

$$135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Записуючи радіанну міру кута, зазвичай позначення «рад» опускають. Наприклад, записують: $135° = \frac{3\pi}{4}$.

У таблиці наведено градусні та радіанні міри кутів, які трапляються найчастіше:

Градусна міра кута	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Використовуючи радіанну міру кута, можна отримати зручну формулу для обчислення довжини дуги кола.

Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R, то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR. Якщо довжину дуги, що містить α рад, позначити через l, то можна записати:

$$\boxed{l = \alpha R}$$

На координатній площині розглянемо коло одиничного радіуса із центром у початку координат. Таке коло називають **одиничним**.

Нехай точка P, починаючи рух від точки $P_0\,(1;\ 0)$, переміщується по одиничному колу проти годинникової стрілки. У певний момент часу вона займе положення, при якому $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 8.4). Говоритимемо, що **точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат** на кут $\frac{2\pi}{3}$ (на кут 120°).

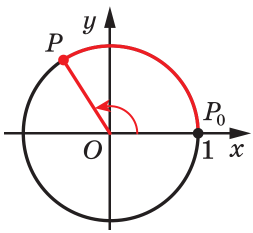


Рис. 8.4

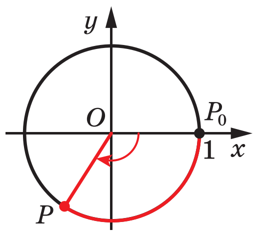


Рис. 8.5

Нехай тепер точка P перемістилася по одиничному колу за годинниковою стрілкою та зайняла положення, при якому $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 8.5). Говоритимемо, що точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $-\frac{2\pi}{3}$ (на кут −120°).

Узагалі, коли розглядають рух точки по колу проти годинникової стрілки (рис. 8.4), то кут повороту вважають додатним, а коли за годинниковою стрілкою (рис. 8.5) — то від’ємним.

Розглянемо ще кілька прикладів. Звернемося до рисунка 8.6. Можна сказати, що точку A отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$ (на кут 90°) або на кут $-\frac{3\pi}{2}$ (на кут −270°). Точку B отримано в результаті повороту точки P_0 на кут π (на кут 180°) або на кут $-\pi$ (на кут −180°). Точку C отримано в результаті повороту точки P_0 на кут $\frac{3\pi}{2}$ (на кут 270°) або на кут $-\frac{\pi}{2}$ (на кут −90°).

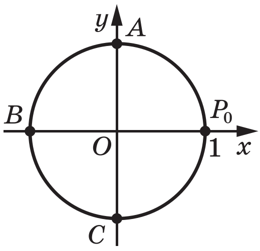


Рис. 8.6

Якщо точка P, рухаючись по одиничному колу, зробить один повний оберт, то можна говорити, що кут повороту дорівнює 2π (тобто 360°) або -2π (тобто −360°).

Якщо точка P зробить півтора оберту проти годинникової стрілки, то природно вважати, що кут повороту дорівнює 3π (тобто 540°), якщо за годинниковою стрілкою — то -3π (тобто −540°).

Величина кута повороту як у радіанах, так і в градусах може виражатися будь-яким дійсним числом.

Кут повороту однозначно визначає положення точки P на одиничному колі. Проте будь-якому положенню точки P на колі відповідає безліч кутів повороту. Наприклад, точці P (рис. 8.7) відповідають такі кути повороту: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ і т. д., а також $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ і т. д. Зауважимо, що всі ці кути можна отримати за допомогою формули $\alpha = \frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

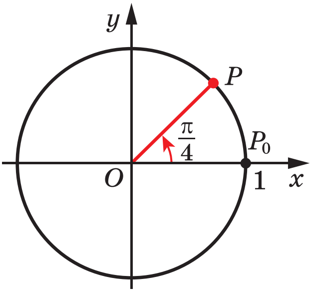


Рис. 8.7

1. Що називають кутом в один радіан?
2. Якою є радіанна міра кута, рівного 1°?
3. Чому дорівнює довжина дуги кола радіуса R, яка містить α рад?

ВПРАВИ

8.1.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

1) $25°$; 2) $40°$; 3) $100°$; 4) $160°$; 5) $210°$; 6) $300°$.

8.2.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

8.3.° Заповніть таблицю:

Градусна міра кута		$12°$	$36°$			$105°$	$225°$			$240°$
Радіанна міра кута	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1{,}8\pi$	

8.4.° Чому дорівнює довжина дуги кола, радіус якої дорівнює 12 см, якщо радіанна міра дуги становить:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 2; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) 2π?

8.5.° Обчисліть довжину дуги кола, якщо відомо її радіанну міру α та радіус R кола:

1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см.

8.6.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо в результаті повороту точки $P_0\,(1;\ 0)$ на кут:

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $150°$; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 4) $-45°$; 5) $-120°$; 6) $-450°$.

8.7.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо в результаті повороту точки $P_0\,(1;\ 0)$ на кут:

1) $-60°$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $320°$; 4) $420°$; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$.

8.8.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0\,(1;\ 0)$ на кут:

1) $127°$; 4) $400°$; 7) $-470°$; 10) $2{,}4\pi$;

2) $89°$; 5) $600°$; 8) $\frac{\pi}{5}$; 11) 3;

3) $276°$; 6) $-400°$; 9) $-\frac{7\pi}{6}$; 12) -2?

8.9.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0\,(1;\ 0)$ на кут:

1) $94°$; 2) $176°$; 3) $200°$; 4) $-100°$;

5) $-380°$; 7) $\frac{3\pi}{4}$; 9) $-\frac{7\pi}{3}$; 11) 1;

6) $700°$; 8) $-\frac{3\pi}{4}$; 10) $-\frac{11\pi}{6}$; 12) -3?

8.10.° Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої в результаті повороту точки $P_0(1;\ 0)$ на кут:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) π; 3) $-90°$; 4) $-180°$; 5) $-\frac{3\pi}{2}$; 6) -2π.

8.11.° Які координати має точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1;\ 0)$ на кут:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) $180°$?

8.12.• Укажіть найменший додатний і найбільший від'ємний кути, на які треба повернути точку $P_0(1;\ 0)$, щоб отримати точку з координатами:

1) $(0;\ 1)$; 2) $(-1;\ 0)$.

8.13.• Укажіть найменший додатний і найбільший від'ємний кути, на які треба повернути точку $P_0(1;\ 0)$, щоб отримати точку з координатами:

1) $(0;\ -1)$; 2) $(1;\ 0)$.

8.14.•• Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1;\ 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1(0;\ 1)$; 2) $P_2(-1;\ 0)$; 3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

8.15.•• Знайдіть усі кути, на які треба повернути точку $P_0(1;\ 0)$, щоб отримати точку:

1) $P_1(0;\ -1)$; 2) $P_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8.16.•• Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1;\ 0)$ на кути:

1) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

2) $-\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 4) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

8.17.•• Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки $P_0(1;\ 0)$ на кути:

1) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

8.18.•• Доведіть, що площа сектора, який містить дугу в α рад, можна обчислити за формулою $S = \frac{\alpha R^2}{2}$, де R — радіус кола.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-6}{x-3} = \frac{x}{x-3}$;

2) $\frac{3x-1}{x} - \frac{4}{x-2} = \frac{10-9x}{x^2-2x}$.

8.20. У деякому місті проживає 88 200 мешканців. Скільки мешканців було в цьому місті два роки тому, якщо щорічний приріст населення становив 5 %?

9. Тригонометричні функції числового аргументу

У 9 класі, вводячи означення тригонометричних функцій кутів від 0° до 180°, ми користувалися одиничним півколом. Узагальнимо ці означення для довільного кута повороту α.

Розглянемо одиничне коло (рис. 9.1).

Означення. Косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки P (x; y) одиничного кола, яку отримано в результаті повороту точки P_0 (1; 0) навколо початку координат на кут α (рис. 9.1).

Записують: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Точки P_0, A, B і C (рис. 9.2) мають відповідно координати (1; 0), (0; 1), (−1; 0), (0; −1). Ці точки отримано в результаті повороту

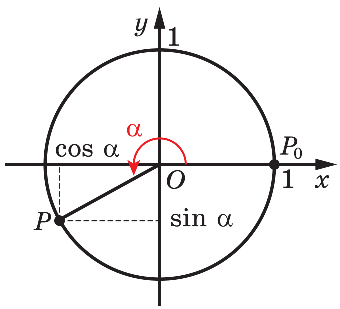


Рис. 9.1

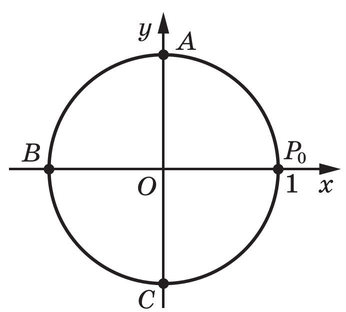


Рис. 9.2

точки $P_0(1; 0)$ відповідно на кути $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Отже, користуючись даним означенням, можна скласти таку таблицю[1]:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

Задача 1. Знайдіть усі кути повороту α, при яких: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$.

Розв'язання. 1) Ординату, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: P_0 і B (рис. 9.2). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots \text{ і } -\pi, -2\pi, -3\pi, -4\pi, \ldots .$$

Усі ці кути можна записати за допомогою формули $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

2) Абсцису, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: A і C (рис. 9.2). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{\pi}{2}+3\pi, \frac{\pi}{2}+4\pi, \ldots \text{ і } \frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}-2\pi, \frac{\pi}{2}-3\pi, \frac{\pi}{2}-4\pi, \ldots .$$

Усі ці кути можна записати за допомогою формули $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\cos\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. ◄

Означення. Тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Наприклад, $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{1} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$.

[1] На форзаці 3 наведено таблицю значень тригонометричних функцій деяких кутів.

З означення тангенса випливає, що тангенс визначений для тих кутів повороту α, для яких $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ви знаєте, що кожному куту повороту α відповідає *єдина* точка одиничного кола. Отже, кожному значенню кута α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) кута α. Через це залежність значення синуса (косинуса, тангенса) від величини кута повороту є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$ і $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута повороту α.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність кут α рад. Це дає змогу розглядати тригонометричні функції числового аргументу.

Наприклад, запис «sin 2» означає «синус кута у 2 радіани».

З означень синуса та косинуса випливає, що областю визначення функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є множина $\mathbb{R}$.

Оскільки абсциси й ординати точок одиничного кола набувають усіх значень від -1 до 1 включно, то областю значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є проміжок $[-1;\ 1]$.

Кутам повороту α і $\alpha + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка одиничного кола, тому

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}\\ \cos\alpha &= \cos(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}\end{aligned}}$$

Область визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ складається з усіх дійсних чисел, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

Можна довести, що справедлива така формула:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n),\ n \in \mathbb{Z}}$$

Задача 2. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $1 - 4\cos\alpha$.

Розв'язання. Оскільки $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$, $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Отже, найменше значення даного виразу дорівнює -3; вираз набуває його при $\cos\alpha = 1$. Найбільше значення даного виразу дорівнює 5; вираз набуває його при $\cos\alpha = -1$. ◄

1. Що називають косинусом кута повороту? синусом кута повороту? тангенсом кута повороту?
2. Якою є область визначення функції $y = \sin x$? $y = \cos x$?
3. Якою є область значень функції $y = \sin x$? $y = \cos x$?
4. Чому дорівнює $\sin(\alpha + 2\pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$? $\cos(\alpha + 2\pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$?
5. Якою є область визначення функції $y = \operatorname{tg} x$?
6. Якою є область значень функції $y = \operatorname{tg} x$?
7. Чому дорівнює $\operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$?

ВПРАВИ

9.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $2\cos 0° + 3\sin 90°$;
2) $\sin^2 60° + \cos^2 30°$;
3) $\sin 0° + \operatorname{tg}\pi - \sin\frac{3\pi}{2}$;
4) $2\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{6}$.

9.2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\cos 60° + \sin 30°$;
2) $7\operatorname{tg}^2 45° - 3\sin 45°$;
3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
4) $\cos\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}$?

9.3.° Чи є можливою рівність:

1) $\cos\alpha = \frac{\pi}{3}$;
2) $\sin\alpha = \frac{9}{8}$?

9.4.° Чи може дорівнювати числу $\frac{\sqrt{5}}{2}$ значення:

1) $\sin\alpha$;
2) $\cos\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\alpha$?

9.5.• Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3\sin\alpha$;
2) $4 + 2\cos\alpha$;
3) $2 - \sin\alpha$;
4) $\sin^2\alpha$.

9.6.• Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $-5\cos\alpha$;
2) $3\cos\alpha - 2$;
3) $5 + \sin^2\alpha$.

9.7.• Укажіть які-небудь три значення x, при яких виконується рівність:

1) $\sin x = 1$;
2) $\sin x = -1$.

9.8.• Укажіть які-небудь три значення x, при яких виконується рівність:

1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$.

9.9.•• Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:
1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$.

9.10.•• Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:
1) $\cos x = 1$;
2) $\cos x = -1$.

9.11.•• Користуючись рисунком 9.3, доведіть, що $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

9.12.•• Доведіть, що

$$\sin\alpha = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

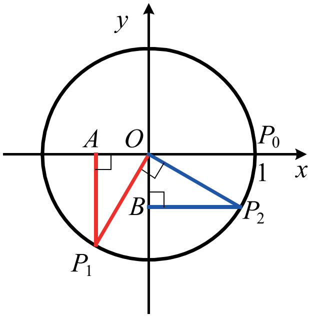


Рис. 9.3

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

9.13. Порівняйте з нулем координати точки $A\ (x;\ y)$, якщо ця точка лежить:
1) у I координатній чверті;
2) у II координатній чверті;
3) у III координатній чверті;
4) у IV координатній чверті.

9.14. Парною чи непарною є функція:
1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; 2) $f(x) = 2x^7 + 4x^5 - 3x$?

10. Знаки значень тригонометричних функцій. Парність і непарність тригонометричних функцій

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0\ (1;\ 0)$ навколо початку координат на кут α. Якщо точка P належить I координатній чверті, то говорять, що α **є кутом I чверті**. Аналогічно можна говорити про кути II, III і IV чвертей.

Наприклад, $\frac{\pi}{7}$ і $-300°$ — кути I чверті, $\frac{2\pi}{3}$ і $-185°$ — кути II чверті, $\frac{5\pi}{4}$ і $-96°$ — кути III чверті, $355°$ і $-\frac{\pi}{8}$ — кути IV чверті.

Кути виду $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, не відносять до жодної чверті.

Точки, розміщені в I чверті, мають додатні абсцису й ординату. Отже, якщо α — кут I чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.

Якщо α — кут II чверті, то $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут III чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

Якщо α — кут IV чверті, то $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

Знаки значень синуса та косинуса схематично показано на рисунку 10.1.

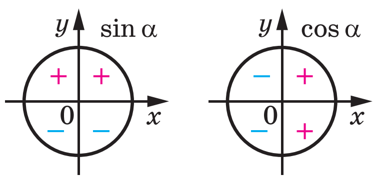


Рис. 10.1

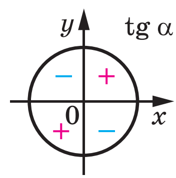


Рис. 10.2

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, то тангенси кутів I і III чвертей є додатними, а кутів II і IV чвертей — від'ємними (рис. 10.2).

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути α і $-\alpha$ відповідно (рис. 10.3).

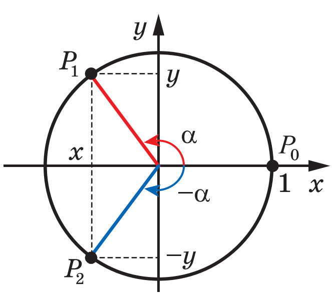


Рис. 10.3

Для будь-якого кута α точки P_1 і P_2 мають рівні абсциси та протилежні ординати. Тоді з означень синуса та косинуса випливає, що для будь-якого дійсного числа α

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos \alpha\\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha\end{aligned}}$$

Це означає, що ***функція косинус є парною, а функція синус — непарною.***

Область визначення функції $y = \text{tg}\ x$ симетрична відносно початку координат (перевірте це самостійно). Крім того:

$$\text{tg}\,(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha.$$

Отже, ***функція тангенс є непарною.***

Задача 1. Який знак має: 1) $\sin 280°$; 2) $\text{tg}\,(-140°)$?

Розв'язання

1) Оскільки $280°$ є кутом IV чверті, то $\sin 280° < 0$.

2) Оскільки $-140°$ є кутом III чверті, то $\text{tg}\,(-140°) > 0$. ◀

Задача 2. Порівняйте $\sin 200°$ і $\sin(-200°)$.

Розв'язання. Оскільки $200°$ — кут III чверті, $-200°$ — кут II чверті, то $\sin 200° < 0$, $\sin(-200°) > 0$.

Отже, $\sin 200° < \sin(-200°)$. ◀

Задача 3. Дослідіть на парність функцію: 1) $f(x) = \dfrac{1+\cos x}{x^2}$; 2) $f(x) = 1 + \sin x$.

Розв'язання

1) Область визначення даної функції, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, симетрична відносно початку координат. Маємо:

$$f(-x) = \frac{1+\cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1+\cos x}{x^2} = f(x).$$

Отже, дана функція є парною.

2) Область визначення даної функції, $D(f) = (-\infty; +\infty)$, симетрична відносно початку координат. Запишемо:

$$f(-x) = 1 + \sin(-x) = 1 - \sin x.$$

Оскільки жодна з рівностей $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$ не виконується для всіх x із області визначення, то дана функція не є ні парною, ні непарною. ◀

1. Коли говорять, що кут α є кутом I чверті? II чверті? III чверті? IV чверті?

2. Які знаки мають синус, косинус і тангенс у кожній із координатних чвертей?

3. Які з тригонометричних функцій є парними, а які — непарними? Запишіть відповідні рівності.

ВПРАВИ

10.1.° Кутом якої координатної чверті є кут:

1) $38°$; 2) $196°$; 3) $-74°$; 4) $\frac{3\pi}{5}$; 5) $\frac{7\pi}{4}$; 6) $-\frac{2\pi}{3}$?

10.2.° Додатним чи від'ємним числом є значення тригонометричної функції:

1) $\sin 110°$; 2) $\cos 200°$; 3) $\sin(-280°)$; 4) $\mathrm{tg}(-75°)$; 5) $\cos 2$; 6) $\mathrm{tg}\, 1$?

10.3.° Порівняйте з нулем:

1) $\mathrm{tg}\, 104°$; 3) $\sin(-36°)$; 5) $\mathrm{tg}(-291°)$;

2) $\cos 220°$; 4) $\cos(-78°)$; 6) $\sin\frac{3\pi}{7}$.

10.4.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin(-30°)$; 2) $\mathrm{tg}(-60°)$; 3) $\cos(-45°)$.

10.5.° Чому дорівнює значення виразу $\cos(-60°) + \mathrm{tg}(-45°)$?

10.6.° Знайдіть значення виразу $\sin(-30°) - 2\,\mathrm{tg}(-45°) + \cos(-45°)$.

10.7.° Знайдіть значення виразу $\sin^2(-60°) + \cos^2(-30°)$.

10.8.• Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\sin\alpha > 0$ і $\cos\alpha < 0$; 2) $\sin\alpha < 0$ і $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$?

10.9.• Відомо, що $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

10.10.• Відомо, що $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin\beta\cos\beta$; 2) $\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}$.

10.11.• Порівняйте:

1) $\mathrm{tg}\, 130°$ і $\mathrm{tg}(-130°)$; 2) $\cos 80°$ і $\sin 330°$; 3) $\mathrm{tg}\, 6$ і $\mathrm{tg}\, 6°$.

10.12.•• Відомо, що α — кут III чверті. Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha - |\sin\alpha|$; 2) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$; 3) $|\mathrm{tg}\,\alpha| - \mathrm{tg}\,\alpha$.

10.13.•• Відомо, що β — кут IV чверті. Спростіть вираз:

1) $|\sin\beta| + \sin\beta$; 2) $\cos\beta - |\cos\beta|$; 3) $|\mathrm{tg}\,\beta| + \mathrm{tg}\,\beta$.

10.14.•• Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \frac{\mathrm{tg}\, x}{x}$; 2) $f(x) = x^3 + \cos x$; 3) $f(x) = \frac{x\sin x}{1 - \cos x}$.

10.15.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$; 2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 - 1}$; 3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x^3 - 1}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.16. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2 - 18} = \sqrt{2x - 3}$; 2) $\sqrt{10 - 3x} + 8 = 5x$.

11. Властивості та графіки тригонометричних функцій

Ви знаєте, що для будь-якого числа x виконуються рівності

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$

$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються при зміні аргументу на 2π. Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є прикладами **періодичних функцій**.

Означення. **Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності**

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T називають періодом функції f.

Ви знаєте, що для будь-якого x із області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ виконуються рівності

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Тоді з означення періодичної функції випливає, що тангенс є періодичною функцією з періодом π.

Можна показати, що *коли функція f має період T, то будь-яке із чисел $2T$, $3T$, ..., а також будь-яке із чисел $-T$, $-2T$, $-3T$, ... також є її періодом.*

Із цієї властивості випливає, що кожна періодична функція має безліч періодів.

Наприклад, будь-яке число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$; а будь-яке число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функції $y = \operatorname{tg} x$.

Якщо серед усіх періодів функції f існує найменший додатний період, то його називають **головним періодом** функції f.

Теорема 11.1. ***Головним періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є число 2π; головним періодом функції $y = \operatorname{tg} x$ є число π.***

Задача 1. Знайдіть значення виразу: 1) $\sin 660°$; 2) $\sin\left(-\dfrac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg} 135°$.

Розв'язання

1) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60° + 360 \cdot 2) =$

$$= \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $\sin\left(-\dfrac{13\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) =$

$$= -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(-45° + 180°) = \operatorname{tg}(-45°) = -1.$ ◄

На рисунку 11.1 зображено графік деякої періодичної функції f з періодом T, $D(f) = \mathbb{R}$.

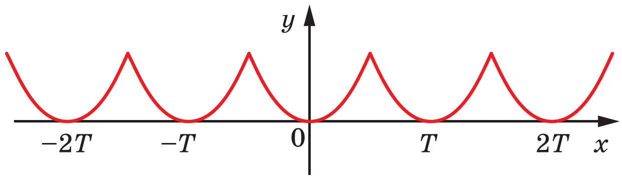


Рис. 11.1

Фрагменти графіка цієї функції на проміжках $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ і т. д., а також на проміжках $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ і т. д. є рівними фігурами, причому будь-яку із цих фігур можна отримати з будь-якої іншої паралельним перенесенням на вектор з координатами $(nT; 0)$, де n — деяке ціле число.

Задача 2. На рисунку 11.2 зображено фрагмент графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $\left[-\dfrac{3T}{2}; \dfrac{5T}{2}\right]$.

Розв'язання. Побудуємо образи зображеної фігури, отримані в результаті паралельного перенесення на вектори з координатами $(T; 0)$, $(2T; 0)$ і $(-T; 0)$. Об'єднання даної фігури та отриманих образів — шуканий графік (рис. 11.3). ◄

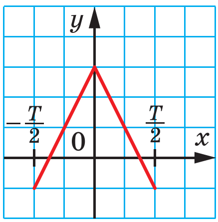


Рис. 11.2

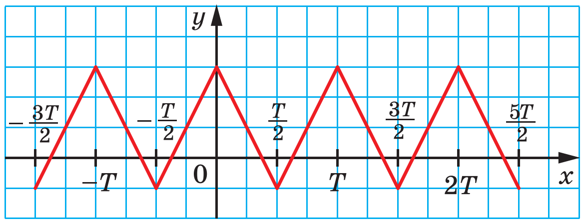


Рис. 11.3

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції.

Під час повороту точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кути від 0 до $\frac{\pi}{2}$ більшому куту повороту відповідає точка одиничного кола з більшою ординатою (рис. 11.4). Це означає, що функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

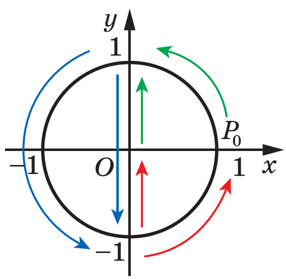


Рис. 11.4

Під час повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ більшому куту повороту відповідає точка одиничного кола з меншою ординатою (рис. 11.4). Отже, функція $y = \sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Під час повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π більшому куту повороту відповідає точка одиничного кола з більшою ординатою (рис. 11.4). Отже, функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ має три нулі: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Якщо $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$; якщо $x \in (\pi; 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ досягає найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = \frac{\pi}{2}$ і найменшого значення, яке дорівнює -1, при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Функція $y = \sin\ x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ набуває всіх значень із проміжку $[-1;\ 1]$.

Отримані властивості функції $y = \sin\ x$ дають змогу побудувати її графік на проміжку $[0;\ 2\pi]$ (рис. 11.5). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких аргументів, наведеної на форзаці 3.

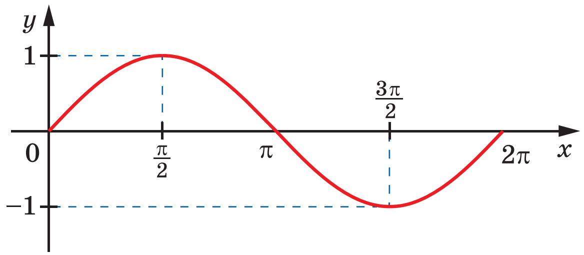


Рис. 11.5

На всій області визначення графік функції $y = \sin\ x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 11.6).

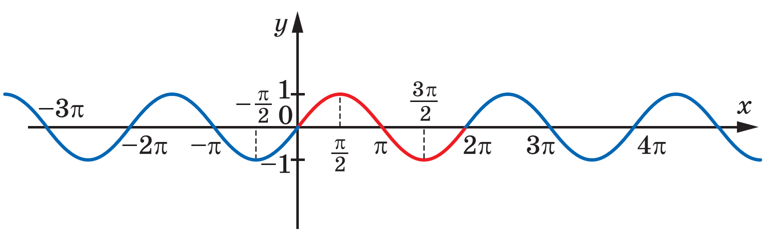


Рис. 11.6

Графік функції $y = \sin\ x$ називають **синусоїдою.**

Розглянемо функцію $y = \cos\ x$. Якщо скористатися формулою $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (див. вправу 9.11), то стає зрозуміло, що графік функції $y = \cos\ x$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = \sin\ x$ на вектор з координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 11.7). Це означає, що графіки функцій $y = \sin\ x$ і $y = \cos\ x$ — рівні фігури.

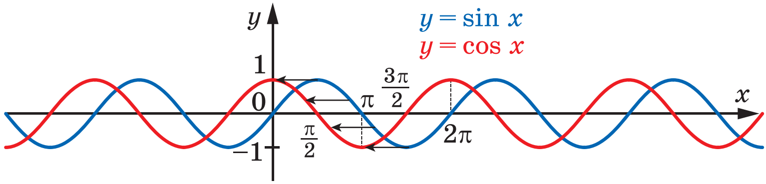


Рис. 11.7

Графік функції $y = \cos x$ називають **косинусоїдою** (рис. 11.8).

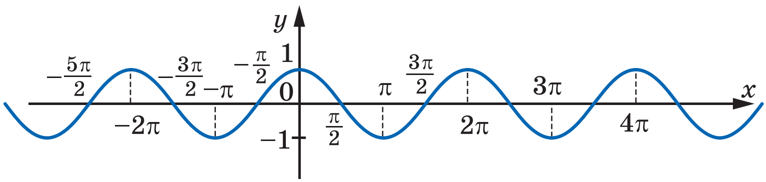


Рис. 11.8

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції (нагадаємо, що функція $y = \operatorname{tg} x$ у точках $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ не визначена).

Можна показати, що під час зміни кута повороту від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значення тангенса збільшуються. Це означає, що функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має один нуль: $x = 0$.

Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\operatorname{tg} x < 0$; якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} x > 0$.

Отримані властивості функції $y = \operatorname{tg} x$ дають змогу побудувати її графік на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 11.9). Графік можна побу-

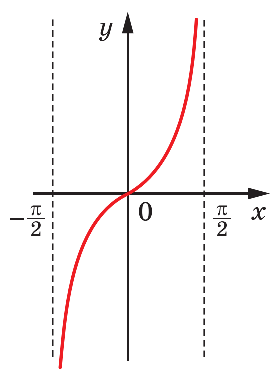


Рис. 11.9

дувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких аргументів, наведеної на форзаці 3.

На всій області визначення графік функції $y = \operatorname{tg} x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 11.10).

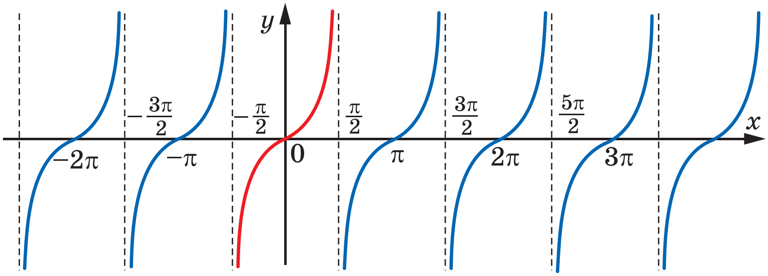


Рис. 11.10

У таблиці (див. с. 69) наведено основні властивості тригонометричних функцій.

Задача 3. Порівняйте: 1) $\sin 0{,}7\pi$ і $\sin 0{,}71\pi$; 2) $\cos 324°$ і $\cos 340°$.

Розв'язання. 1) Оскільки числа $0{,}7\pi$ і $0{,}71\pi$ належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, на якому функція $y = \sin x$ спадає, і $0{,}7\pi < 0{,}71\pi$, то $\sin 0{,}7\pi > \sin 0{,}71\pi$.

2) Оскільки кути $324°$ і $340°$ належать проміжку $[180°;\ 360°]$, на якому функція $y = \cos x$ зростає, і $324° < 340°$, то $\cos 324° < \cos 340°$. ◄

?

1. Яку функцію називають періодичною?
2. Яке число називають головним періодом функції?
3. Зобразіть схематично графік і сформулюйте основні властивості функції $y = \sin x$.
4. Зобразіть схематично графік і сформулюйте основні властивості функції $y = \cos x$.
5. Зобразіть схематично графік і сформулюйте основні властивості функції $y = \operatorname{tg} x$.

Властивість	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$
Область значень	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$
Головний період	2π	2π	π
Нулі функції	πn	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn
Функція набуває додатних значень на проміжках	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Функція набуває від'ємних значень на проміжках	$(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$
Парність	Непарна	Парна	Непарна
Проміжки зростання	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
Проміжки спадання	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	—
Найбільше значення	1	1	—
Найменше значення	−1	−1	—

ВПРАВИ

11.1.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 390°$; 3) $\sin(-390°)$; 5) $\cos 300°$;

2) $\text{tg}\, 780°$; 4) $\text{tg}\,(-210°)$; 6) $\sin\frac{5\pi}{3}$.

11.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 420°$; 2) $\text{tg}\,(-315°)$; 3) $\sin 1110°$; 4) $\cos\frac{7\pi}{3}$.

11.3.° Чи належить графіку функції $y = \cos x$ точка:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\left(\frac{9\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $C\,(-4\pi; -1)$?

11.4.° Чи проходить графік функції $y = \text{tg}\, x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$; 3) $C\,(\pi; 0)$?

11.5.° Чи проходить графік функції $y = \sin x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$; 2) $B\,(\pi; -1)$; 3) $C\left(\frac{23\pi}{6}; -\frac{1}{2}\right)$?

11.6.° Серед чисел $-2\pi,\ -\frac{3\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{9\pi}{2},\ 6\pi,\ 7\pi$ укажіть:

1) нулі функції $y = \sin x$;
2) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найбільшого значення;
3) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найменшого значення.

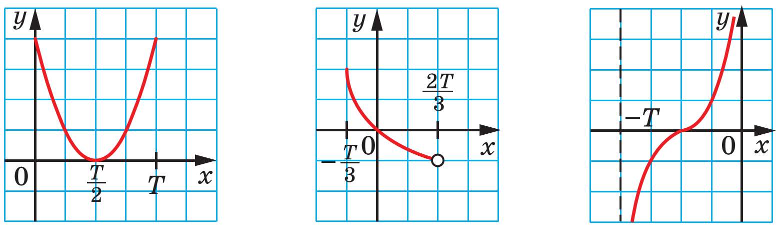
11.7.° Серед чисел $-\frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\pi,\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ 5\pi,\ 8\pi$ укажіть:

1) нулі функції $y = \cos x$;
2) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найбільшого значення;
3) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найменшого значення.

11.8.° Які із чисел $-\frac{3\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi$:

1) є нулями функції $y = \text{tg}\, x$;
2) не належать області визначення функції $y = \text{tg}\, x$?

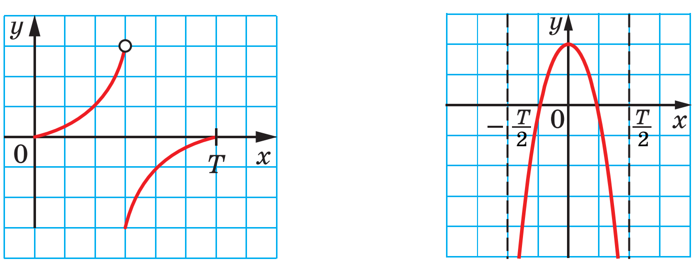
11.9.$^{\bullet}$ На рисунку 11.11 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T;\ 3T]$.



а *б* *в*

Рис. 11.11

11.10.$^{\bullet}$ На рисунку 11.12 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T;\ 2T]$.



а *б*

Рис. 11.12

11.11.$^{\bullet}$ На яких із наведених проміжків функція $y = \sin x$ зростає:

1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

11.12.$^{\bullet}$ На яких із наведених проміжків функція $y = \sin x$ спадає:

1) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $[-\pi;\ 0]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$?

11.13.$^{\bullet}$ Які з наведених проміжків є проміжками спадання функції $y = \cos x$:

1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi;\ -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi;\ 7\pi]$?

11.14.• Які з наведених проміжків є проміжками зростання функції $y = \cos x$:

1) $[-3\pi; -2\pi]$; 2) $[0; \pi]$; 3) $[-\pi; \pi]$; 4) $[3\pi; 4\pi]$?

11.15.• Порівняйте:

1) $\sin 20°$ і $\sin 21°$;
2) $\cos 20°$ і $\cos 21°$;
3) $\sin \frac{10\pi}{9}$ і $\sin \frac{25\pi}{18}$;
4) $\operatorname{tg}(-38°)$ і $\operatorname{tg}(-42°)$.

11.16.• Порівняйте:

1) $\cos \frac{\pi}{9}$ і $\cos \frac{4\pi}{9}$; 2) $\sin \frac{5\pi}{9}$ і $\sin \frac{17\pi}{18}$; 3) $\operatorname{tg} 100°$ і $\operatorname{tg} 92°$.

11.17.•• Доведіть, що число T є періодом функції f:

1) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$, $T = 8\pi$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$, $T = -\frac{2\pi}{3}$.

11.18.•• Доведіть, що числа $\frac{2\pi}{3}$ і -4π є періодами функції $f(x) = \cos 3x$.

11.19.* Порівняйте:

1) $\sin 58°$ і $\cos 58°$; 2) $\sin 18°$ і $\cos 18°$; 3) $\cos 80°$ і $\sin 70°$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.20. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$; 3) $f(x) = x\sqrt{x - 1}$.

11.21. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = x^2 + 2$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} + 3$.

12. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

У цьому пункті встановимо тотожності, які пов'язують значення тригонометричних функцій одного й того самого аргументу.

Координати будь-якої точки $P(x; y)$ одиничного кола задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Оскільки $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, де α — кут повороту, у результаті якого з точки $P_0(1; 0)$ було отримано точку P, то

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \qquad (1)$$

Звернемо увагу на те, що точку P на одиничному колі вибрано довільно, тому тотожність (1) справедлива для будь-якого α. Її називають **основною тригонометричною тотожністю**.

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, знайдемо залежність між тангенсом і косинусом.

Нехай $\cos\alpha \neq 0$. Поділимо обидві частини рівності (1) на $\cos^2\alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Звідси

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$$\boxed{\mathbf{1 + tg^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}}$$

Задача 1. Спростіть вираз:

1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x$; 2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi$.

Розв'язання. 1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2) $\frac{1}{\cos^2\varphi} - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi =$

$= \cos^2\varphi$. ◄

Задача 2. Відомо, що $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Обчисліть $\sin\alpha$.

Розв'язання. Маємо: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

Звідси $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ або $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Рисунок 12.1 ілюструє цю задачу. ◄

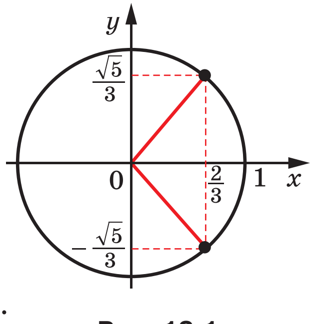


Рис. 12.1

Задача 3. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$; отже, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24}$. ◄

1. Яку рівність називають основною тригонометричною тотожністю?
2. Яка тотожність пов'язує тангенс і косинус одного й того самого аргументу?

ВПРАВИ

12.1.° Спростіть вираз:

1) $1 - \cos^2\alpha$;
2) $\sin^2\beta - 1$;
3) $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 1$;
4) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$;
5) $1 - \sin^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;
6) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

12.2.° Спростіть вираз:

1) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 5\alpha}$;
2) $\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)\left(1 - \sin\frac{x}{2}\right)$;
3) $(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2 + \left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$;
4) $\frac{\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha - 1}$.

12.3.• Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ і $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{4}$?

12.4.• Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ і $\cos\alpha = \frac{3}{5}$?

12.5.• Спростіть вираз:

1) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2$;
2) $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$;
3) $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$;
4) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$.

12.6.• Спростіть вираз:

1) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;

3) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta} + \dfrac{1-\sin\beta}{\cos\beta}$;

4) $\operatorname{tg} x + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

12.7.• Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha = 0{,}6$ і $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 2$ і $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

12.8.• Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$ і $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ і $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{3}$ і $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

12.9.•• Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$; 2) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

12.10.•• Доведіть тотожність:

1) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 2) $\dfrac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

12.11.•• Знайдіть значення виразу $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}$.

12.12.•• Знайдіть значення виразу $\dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

12.13.•• Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha$.

12.14.•• Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

12.15. Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\dfrac{a^{\frac{8}{3}} \cdot a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ при $a = 0{,}008$;

2) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$ при $a = 0{,}0625$.

13. Формули додавання

Формулами додавання називають формули, які виражають $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ і $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометричні функції кутів α і β.

Доведемо, що $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кути α і β відповідно.

Розглянемо випадок, коли $0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \pi$. Тоді кут між векторами $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ дорівнює $\alpha - \beta$ (рис. 13.1). Координати точок P_1 і P_2 відповідно дорівнюють $(\cos\alpha; \sin\alpha)$ і $(\cos\beta; \sin\beta)$. Тоді вектор $\overrightarrow{OP_1}$ має координати $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а вектор $\overrightarrow{OP_2}$ — координати $(\cos\beta; \sin\beta)$.

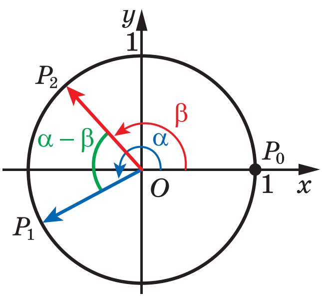


Рис. 13.1

Виразимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ через їхні координати:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Водночас за означенням скалярного добутку векторів можна записати:

$$\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \left|\overrightarrow{OP_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_2}\right| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta).$$

Звідси отримуємо формулу, яку називають **косинусом різниці:**

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \qquad (1)$$

Формула (1) справедлива й у тому випадку, коли $(\alpha - \beta) \notin [0; \pi]$.

Доведемо формулу **косинуса суми:**

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Маємо: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Формули **синуса суми** й **синуса різниці** мають вигляд:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

Формули **тангенса суми** й **тангенса різниці** мають вигляд:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\mathbf{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathbf{tg}\,\alpha-\mathbf{tg}\,\beta}{1+\mathbf{tg}\,\alpha\;\mathbf{tg}\,\beta}} \qquad (3)$$

Тотожність (2) справедлива для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Тотожність (3) справедлива для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha-\beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 2α через тригонометричні функції аргументу α, називають **формулами подвійного аргументу**.

У формулах додавання

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

покладемо $\beta=\alpha$. Отримаємо:

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Ці формули відповідно називають **формулами косинуса, синуса й тангенса подвійного аргументу**.

Оскільки $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ і $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, то з формули $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ отримуємо ще дві формули:

$$\boxed{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1}$$

Інколи ці формули зручно використовувати в такому вигляді:

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha,$$
$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$$

або в такому вигляді:

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

Дві останні формули називають **формулами пониження степеня.**

Задача 1. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи формули синуса суми й синуса різниці, отримуємо: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)-\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$$

2) Замінимо даний вираз на синус різниці аргументів $\alpha+45°$ і $\alpha-45°$. Отримуємо:

$$\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)=$$

$$=\sin((\alpha+45°)-(\alpha-45°))=\sin(\alpha+45°-\alpha+45°)=\sin 90°=1. ◄$$

Задача 2. Доведіть тотожність $\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання. $\sin\alpha-\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\dfrac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}. ◄$$

Задача 3. Знайдіть значення виразу $\dfrac{1-\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,25°}{\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,25°}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу тангенса суми кутів $20°$ і $25°$, отримуємо:

$$\frac{1-\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,25°}{\mathrm{tg}\,20°+\mathrm{tg}\,25°}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,(20°+25°)}=\frac{1}{\mathrm{tg}\,45°}=1. ◄$$

Задача 4. Спростіть вираз: 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$; 2) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta$.

Розв'язання

1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos 2\alpha$.

2) $1-8\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta=1-2\sin^2 2\beta=\cos 4\beta$. ◄

1. Запишіть формулу:

1) косинуса різниці;
2) косинуса суми;
3) синуса суми;
4) синуса різниці;
5) тангенса суми;
6) тангенса різниці.

2. Запишіть формули косинуса, синуса й тангенса подвійного аргументу.

3. Запишіть формули пониження степеня.

ВПРАВИ

13.1.° Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ)-\sin\alpha+\cos\alpha$;
4) $2\cos(60^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

13.2.° Спростіть вираз:

1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)$;
2) $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$.

13.3.° Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha\cos4\alpha+\cos\alpha\sin4\alpha$;
2) $\cos17^\circ\cos43^\circ-\sin17^\circ\sin43^\circ$;
3) $\cos\dfrac{3\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}-\sin\dfrac{3\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$;
4) $\sin53^\circ\cos7^\circ-\cos53^\circ\sin(-7^\circ)$;
5) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;
6) $\dfrac{\sin20^\circ\cos5^\circ-\cos20^\circ\sin5^\circ}{\cos10^\circ\cos5^\circ-\sin10^\circ\sin5^\circ}$.

13.4.° Спростіть вираз:

1) $\cos6\alpha\cos2\alpha-\sin6\alpha\sin2\alpha$;
2) $\sin12^\circ\cos18^\circ+\sin18^\circ\cos12^\circ$;
3) $\sin(-15^\circ)\cos75^\circ+\cos15^\circ\sin75^\circ$;
4) $\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta$.

13.5.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{4}$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

13.6.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=5$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

13.7.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 13° + \operatorname{tg} 47°}{1 - \operatorname{tg} 13° \operatorname{tg} 47°}$;
2) $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 27° \operatorname{tg} 33°}{\operatorname{tg} 27° + \operatorname{tg} 33°}$.

13.8.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} 24° + \operatorname{tg} 36°}{1 - \operatorname{tg} 24° \operatorname{tg} 36°}$;
2) $\dfrac{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$.

13.9.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$;
2) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$;
3) $\cos 2\alpha + \sin^2 \alpha$;
4) $\dfrac{\sin 50°}{2 \cos 25°}$;
5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$;
6) $1 - 2 \sin^2 \dfrac{\alpha}{4}$;
7) $\left(\sin \dfrac{\alpha}{4} + \cos \dfrac{\alpha}{4}\right)\left(\sin \dfrac{\alpha}{4} - \cos \dfrac{\alpha}{4}\right)$;
8) $\dfrac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}$.

13.10.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 80°}{\cos 40°}$;
2) $\cos 4\beta + \sin^2 2\beta$;
3) $\cos 6\alpha + 2 \sin^2 3\alpha$;
4) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$;
5) $\sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$;
6) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}$;
7) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$;
8) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 1{,}5\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$.

13.11.° Обчисліть значення виразу:

1) $2 \sin 75° \cos 75°$;
2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;
3) $1 - 2 \sin^2 \dfrac{\pi}{12}$;
4) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 165°}{1 - \operatorname{tg}^2 165°}$.

13.12.° Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 75°}{1 - \operatorname{tg}^2 75°}$;
2) $2 \sin \dfrac{3\pi}{8} \cos \dfrac{3\pi}{8}$;
3) $1 - 2 \cos^2 \dfrac{\pi}{12}$.

13.13.• Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = 1$;
2) $\dfrac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45° + \alpha)}{2 \sin(45° + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

13.14.$^{\bullet}$ Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}=1;$ 2) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\sqrt{2}.$

13.15.$^{\bullet}$ Знайдіть $\cos(\alpha+\beta)$, якщо $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ і $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

13.16.$^{\bullet}$ Знайдіть $\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ і $\cos\beta=\frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

13.17.$^{\bullet}$ Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

13.18.$^{\bullet}$ Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

13.19.$^{\bullet}$ Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-0{,}6$ і $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

13.20.$^{\bullet}$ Знайдіть $\operatorname{tg}2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=4$.

13.21.$^{\bullet}$ Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$.

13.22.$^{\bullet}$ Знайдіть $\sin 15^\circ$.

13.23.$^{\bullet}$ Знайдіть $\cos 75^\circ$.

13.24.$^{\bullet}$ Доведіть тотожність $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

13.25.$^{\bullet}$ Спростіть вираз $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

13.26.$^{\bullet\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha};$ 3) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha};$

2) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha};$ 4) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}.$

13.27.$^{\bullet\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha};$ 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$

13.28.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть найбільше значення виразу $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$.

13.29.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть найменше значення виразу $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$.

13.30.* Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3}$.

13.31.* Знайдіть $\sin\alpha$, якщо $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

13.32. При яких значеннях x значення виразів $4x+5$, $7x-1$ і x^2+2 будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть ці члени прогресії.

13.33. При яких значеннях x значення виразів $x-1$, $1-2x$ і $x+7$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці члени прогресії.

14. Формули зведення

Періодичність тригонометричних функцій дає змогу зводити обчислення значень синуса та косинуса до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0;\ 2\pi]$. У цьому пункті ми розглянемо формули, які дають можливість у таких обчисленнях обмежитися лише кутами з проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Кожний кут із проміжку $[0;\ 2\pi]$ можна подати у вигляді $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, або $\pi\pm\alpha$, або $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, де $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Наприклад, $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$.

Обчислення синусів і косинусів кутів виду $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ можна звести до обчислення синуса або косинуса кута α. Наприклад:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha.$$

Застосовуючи формули додавання, аналогічно можна отримати:

$$\boxed{\begin{array}{lll}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha & \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha & \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha & \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha\end{array}}$$

Ці формули називають **формулами зведення для синуса**.

Наведені нижче формули називають **формулами зведення для косинуса:**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

Проаналізувавши записані формули зведення, можна помітити закономірності, завдяки яким необов'язково заучувати ці формули.

Для того щоб записати будь-яку з них, можна керуватися такими правилами.

1. ***У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що*** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. ***Якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд*** $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ***або*** $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, ***то синус замінюють на косинус і навпаки. Якщо аргумент має вигляд*** $\pi\pm\alpha$, ***то заміни функції не відбувається.***

Покажемо, як застосувати ці правила для виразу $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Припустивши, що $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, доходимо висновку: $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ є кутом III координатної чверті. Тоді $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)<0$. За першим правилом у правій частині рівності має стояти знак «–».

Оскільки аргумент має вигляд $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, то за другим правилом потрібно замінити синус на косинус.

Отже, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

Задача 1. Спростіть вираз $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Розв'язання. Маємо:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2=(-\sin\alpha)^2=\sin^2\alpha. ◄$$

Задача 2. Замініть значення тригонометричної функції значенням функції гострого кута: 1) $\cos\frac{9\pi}{10}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$.

Розв'язання. 1) $\cos\frac{9\pi}{10}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$.

2) $\cos\frac{8\pi}{7}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\cos\frac{\pi}{7}$. ◄

?

Сформулюйте правила, якими можна керуватися під час застосування формул зведення.

ВПРАВИ

14.1.° Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 3) $\cos(-\alpha+270°)$; 5) $\cos^2(3\pi-\alpha)$;

2) $\sin(\pi-\alpha)$; 4) $\cos(\alpha-180°)$; 6) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

14.2.° Спростіть вираз:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\sin(180°+\alpha)$;

2) $\cos(\pi-\alpha)$; 4) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$.

14.3.° Замініть значення тригонометричної функції значенням функції гострого кута:

1) $\cos 123°$; 2) $\sin 216°$; 3) $\cos(-218°)$; 4) $\cos\frac{5\pi}{9}$.

14.4.° Замініть значення тригонометричної функції значенням функції гострого кута:

1) $\sin(-305°)$; 2) $\sin\frac{14\pi}{15}$; 3) $\cos(-0{,}7\pi)$; 4) $\cos\frac{6\pi}{5}$.

14.5.° Обчисліть значення тригонометричної функції:

1) $\cos 225°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\cos\frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

14.6.° Обчисліть значення тригонометричної функції:

1) $\cos(-150°)$; 2) $\cos 210°$; 3) $\sin 315°$; 4) $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$.

14.7.• Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{\sin^2 315° \cos 300° + \operatorname{tg}(-315°)}{\sin(-120°)\cos 150°}$; 2) $\frac{\cos 66° \cos 6° + \cos 84° \cos 24°}{\cos 65° \cos 5° + \cos 85° \cos 25°}$.

14.8.• Знайдіть значення виразу $\frac{\cos 64° \cos 4° - \cos 86° \cos 26°}{\cos 71° \cos 41° - \cos 49° \cos 19°}$.

14.9.•• Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha)}$;

2) $\sin(\pi - \beta)\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)\cos(\pi - \beta)$.

14.10.•• Доведіть тотожність $\frac{\sin(\pi - \alpha)\sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\cos\alpha$.

14.11.* Обчисліть: $\sin 0° + \sin 1° + \sin 2° + \ldots + \sin 359° + \sin 360°$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

14.12. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

14.13. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\frac{x+4}{x^2-4}$;

2) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$;

3) $\frac{9}{\sqrt{3x+6}}$;

4) $\sqrt{7x-42} + \frac{1}{x^2-8x}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;

6) $\frac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{8-4x}}$?

15. Рівняння $\cos x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\cos x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, причому їх безліч.

Сказане легко зрозуміти, звернувшись до графічної інтерпретації: графіки функцій $y = \cos x$ і $y = b$, де $|b| \leqslant 1$, мають безліч спільних точок (рис. 15.1).

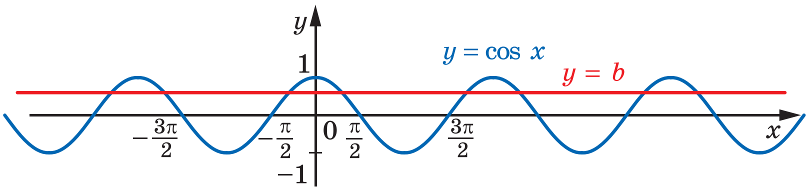


Рис. 15.1

Зрозуміти, як розв'язувати рівняння $\cos x = b$ у загальному випадку, допоможе розгляд окремого випадку. Наприклад, розв'яжемо рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$.

На рисунку 15.2 зображено графіки функцій $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$.

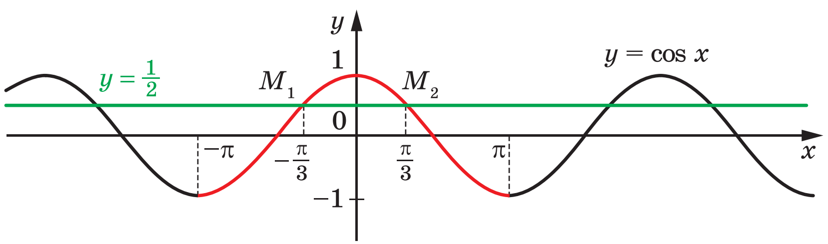


Рис. 15.2

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ (червона частина кривої на рисунку 15.2), тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції. Пряма $y = \frac{1}{2}$ перетинає графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ у двох точках M_1 і M_2, абсциси яких є протилежними числами. Отже, рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ має два корені. Оскільки $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то цими коренями є числа $-\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{3}$.

Функція $y = \cos\ x$ є періодичною з періодом 2π. Тому кожен з інших коренів рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ відрізняється від одного зі знайдених коренів $-\frac{\pi}{3}$ або $\frac{\pi}{3}$ на число виду $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Отже, корені розглядуваного рівняння можна задати формулами $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ і $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Як правило, ці дві формули замінюють одним записом:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}.$$

Повернемося до рівняння $\cos\ x = b$, де $|b| \leqslant 1$. На рисунку 15.3 показано, що на проміжку $[-\pi;\ \pi]$ це рівняння має два корені α і $-\alpha$, де $\alpha \in [0;\ \pi]$ (при $b = 1$ ці корені збігаються та дорівнюють нулю).

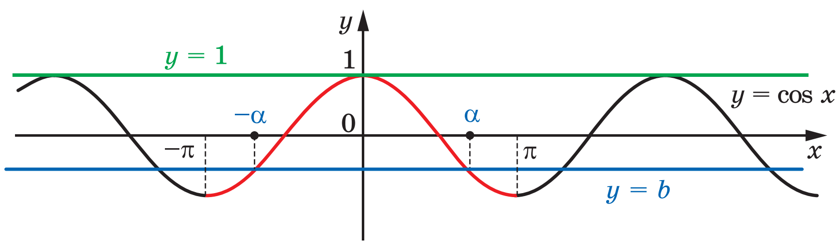


Рис. 15.3

Тоді всі корені рівняння $\cos\ x = b$ мають вигляд

$$x = \pm\alpha + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ця формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\cos x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арккосинус.

Означення. Арккосинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $[0;\ \pi]$, косинус якого дорівнює b.

Для арккосинуса числа b використовують позначення $\arccos\ b$.

Наприклад,

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},\ \text{оскільки}\ \frac{\pi}{3} \in [0; \pi]\ \text{і}\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4},\ \text{оскільки}\ \frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]\ \text{і}\ \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Узагалі, **$\arccos b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in [0;\ \pi]$ *і* $\cos \alpha = b$.**

Тепер формулу коренів рівняння $\cos x = b$, $|b| \leqslant 1$, можна записати в такому вигляді:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \pm \arccos b + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}} \qquad (1)$$

Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\cos x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 9). Нагадаємо отримані результати:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Такі самі відповіді можна отримати, використовуючи формулу (1).

Має місце рівність

$$\mathbf{arccos}\,(-b) = \pi - \mathbf{arccos}\, b.$$

Задача. Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - 7x\right) = 0$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (1), запишемо:

$$4x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо: $4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$.

Відповідь: $\pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Маємо: $\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\quad \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n;\quad x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n.$$

Відповідь: $\pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

3) Перепишемо дане рівняння так: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$. Звідси

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n$; $7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \mathbb{Z}$. ◄

?

1. При яких значеннях b має корені рівняння cos $x = b$?

2. Скільки коренів має рівняння cos $x = b$ при $|b| \leqslant 1$?

3. Що називають арккосинусом числа b?

4. Який вигляд має формула коренів рівняння cos $x = b$ при $|b| \leqslant 1$?

5. Який вигляд має формула коренів рівняння cos $x = 1$? cos $x = 0$? cos $x = -1$?

ВПРАВИ

15.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{1}{3}$.

15.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{4}{7}$.

15.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos 6x = 1$; 5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$;

2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$; 6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

15.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{3x}{4} = -1$.

15.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0$.

15.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1$; 2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0$.

15.7.• Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

15.8.• Знайдіть який-небудь від'ємний корінь рівняння

$$\cos\frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

15.9.•• Скільки коренів рівняння $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

15.10.•• Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$, які задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{6} < x < 4\pi$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

15.11. Спростіть вираз $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}} : \dfrac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$.

15.12. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{3x^2 - 5x + 2}}$; 2) $y = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{x + 2}$.

16. Рівняння $\sin x = b$ і $\operatorname{tg} x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \sin x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\sin x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, причому їх безліч.

Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\sin x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 9). Нагадаємо отримані результати:

$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Для того щоб отримати загальну формулу коренів рівняння $\sin x = b$, де $|b| \leqslant 1$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 16.1 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = b$, $|b| \leqslant 1$.

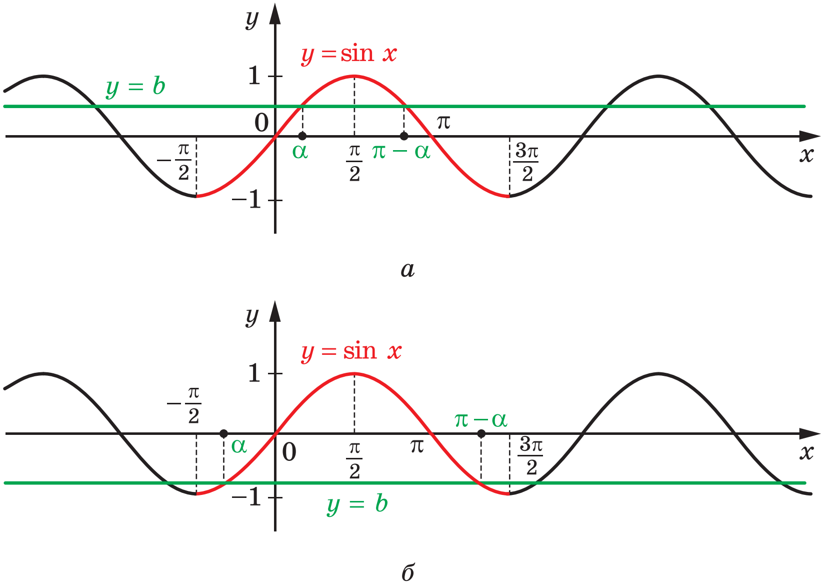


Рис. 16.1

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (червона частина кривої на рисунку 16.1), тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції. На цьому проміжку рівняння $\sin x = b$ має два корені α і $\pi - \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(\text{при } b = 1 \text{ ці корені збігаються та дорівнюють } \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною з періодом 2π, то кожен з інших коренів рівняння $\sin x = b$ відрізняється від одного зі знайдених коренів на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді корені рівняння $\sin x = b$ можна задати формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \text{ і } x = \pi - \alpha + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ці дві формули можна замінити одним записом:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Справді, якщо k — парне число, тобто $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо $x = \alpha + 2\pi n$; якщо k — непарне число, тобто $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

Формула (1) показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\sin x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арксинус.

Означення. Арксинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b.

Для арксинуса числа b використовують позначення $\arcsin b$.

Наприклад, $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Узагалі, $\boldsymbol{\arcsin b = \alpha}$, ***якщо*** $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ***і*** $\boldsymbol{\sin \alpha = b}$.

Тепер формулу коренів рівняння $\sin x = b$, $|b| \leqslant 1$, можна записати в такому вигляді:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin b + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}} \qquad (2)$$

Має місце рівність

$$\arcsin(-b) = -\arcsin b.$$

Задача 1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$;   2) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (2), запишемо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо:

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n; \quad \frac{x}{2} = -(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n;$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Відповідь: $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Перепишемо дане рівняння так: $-\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n; \quad 3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$$

Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$ ◄

Оскільки областю значень функції $y = \text{tg}\, x$ є множина $\mathbb{R}$, то рівняння tg $x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b.

Для того щоб отримати формулу коренів рівняння tg $x = b$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 16.2 зображено графіки функцій $y = \text{tg}\, x$ і $y = b$.

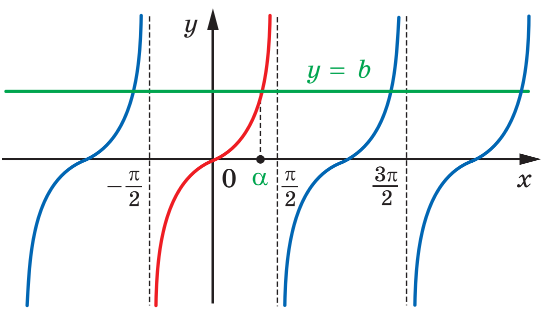


Рис. 16.2

Розглянемо функцію $y = \text{tg}\, x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (червона крива на рисунку 16.2), тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції. На цьому проміжку рівняння tg $x = b$ при будь-якому b має єдиний корінь α.

Оскільки функція $y = \text{tg}\, x$ є періодичною з періодом π, то кожен з інших коренів рівняння tg $x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді корені рівняння tg $x = b$ можна задати формулою

$$x = \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отримана формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння tg $x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b.

Для арктангенса числа b використовують позначення arctg b.

Наприклад, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$;

$\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$, оскільки $-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Узагалі, $\boldsymbol{\operatorname{arctg} b=\alpha}$, ***якщо*** $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ ***і*** $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha=b}$.

Тепер формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x=b$ можна записати так:

$$\boxed{x=\operatorname{arctg} b+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}}$$

Має місце рівність

$$\operatorname{arctg}(-b)=-\operatorname{arctg} b.$$

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\frac{2x}{3}=-\sqrt{3}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{2x}{3}=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

$$\frac{2}{3}x=-\frac{\pi}{3}+\pi k;\quad x=-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. ◄

1. При яких значеннях b має корені рівняння $\sin x=b$?
2. Що називають арксинусом числа b?
3. Запишіть формулу коренів рівняння $\sin x=b$ при $|b|\leqslant 1$.
4. Запишіть формулу коренів рівняння $\sin x=1$; $\sin x=0$; $\sin x=-1$.
5. При яких значеннях b має корені рівняння $\operatorname{tg} x=b$?
6. Що називають арктангенсом числа b?
7. Запишіть формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x=b$.

ВПРАВИ

16.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x=\frac{1}{4}$; 4) $\sin x=\sqrt{2}$.

16.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x=\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\sin x=1{,}5$.

16.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 5x = 1$; 3) $\sin(-8x) = \frac{2}{9}$.

16.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\frac{x}{7} = 0$; 3) $\sin\frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -1$; 4) $\operatorname{tg} x = 5$.

16.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -2$.

16.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$.

16.8.° Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\frac{3}{5}x = 0$.

16.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0$.

16.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1$; 2) $2\sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0$.

16.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$.

16.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $3\operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0$.

16.13.• Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

16.14.• Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{15}\right) = -1.$$

16.15.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі корені рівняння $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, які належать проміжку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

16.16.$^{\bullet\bullet}$ Скільки коренів рівняння $\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

16.17.$^{\bullet\bullet}$ Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 4x=1$ належать проміжку $[0; \pi]$?

16.18.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{3}$, які належать проміжку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

16.19. Розв'яжіть рівняння:

1) $x-\sqrt{x-1}=3$;
2) $\sqrt{1+4x-x^2}+1=x$;
3) $\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x-5}=2x+1$;
4) $\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{5+x}}=\sqrt{5+x}$.

17. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних

У пунктах 15, 16 ми отримали формули для розв'язування рівнянь виду $\cos x=a$, $\sin x=a$, $\operatorname{tg} x=a$. Ці рівняння називають **найпростішими тригонометричними рівняннями.** За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$.

Розв'язання. Виконаємо заміну $\cos x=t$. Тоді дане рівняння набуває вигляду $2t^2-5t+2=0$. Звідси $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=2$. Оскільки $|\cos x|\leqslant 1$, то рівняння $\cos x=2$ не має коренів. Отже, початкове рівняння рівносильне рівнянню $\cos x = \frac{1}{2}$. Остаточно отримуємо: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$. ◄

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $\sin x - 3\cos 2x = 2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, перетворимо дане рівняння:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$
$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Нехай $\sin x = t$. Отримуємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0$. Звідси $t_1 = -1,\ t_2 = \frac{5}{6}$.

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$. ◄

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, то дане рівняння можна записати в такому вигляді:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

Звідси $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Нехай $\operatorname{tg} x = t$. Маємо: $t^2 + t - 2 = 0$. Тоді $t_1 = 1,\ \ t_2 = -2$.

Отримуємо, що дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -2. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\mathrm{arctg}\, 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ -\mathrm{arctg}\ 2 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$ ◄

ВПРАВИ

17.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0;$
2) $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0;$
3) $\sin^2 3x + 2\sin 3x - 3 = 0;$
4) $\mathrm{tg}^2\, x - 2\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0.$

17.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0;$
2) $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0;$
3) $4\,\mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x - 3 = 0;$
4) $3\cos^2 \dfrac{x}{4} + 5\cos\dfrac{x}{4} - 2 = 0.$

17.3.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x - \cos x = 0;$
2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0;$
3) $4\cos 2x - \sin 2x = 0.$

17.4.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x = 0;$
2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0;$
3) $\cos 4x - 3\sin 4x = 0.$

17.5.• Розв'яжіть рівняння:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0;$
2) $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0;$
3) $\cos 2x = 1 + 4\cos x;$
4) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0;$
5) $\cos 2x + \sin x = 0;$
6) $\cos\dfrac{2x}{3} - 5\cos\dfrac{x}{3} - 2 = 0;$
7) $\cos\dfrac{x}{2} + \cos x = 0;$
8) $\cos 2x - 4\sqrt{2}\cos x + 4 = 0.$

17.6.• Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sin^2 x + 8\cos x + 1 = 0;$
2) $2\cos^2 x = 1 + \sin x;$
3) $\cos 2x + 8\sin x = 3;$
4) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x;$
5) $5\sin\dfrac{x}{6} - \cos\dfrac{x}{3} + 3 = 0;$
6) $\cos x + \sin\dfrac{x}{2} = 0.$

17.7.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $8\sin^2 3x + 4\sin^2 6x = 5;$
2) $2\,\mathrm{tg}^2\, x + 4\cos^2 x = 7.$

17.8.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$; 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 3 = \dfrac{3}{\cos^2 x}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

17.9. Порівняйте числа:

1) $\sqrt[5]{7}$ і $\sqrt[10]{47}$; 2) $\sqrt{2}$ і $\sqrt[5]{\sqrt{33}}$; 3) $\sqrt[3]{15}$ і $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{25}$ і $\sqrt[3]{5}$.

17.10. Розв'яжіть рівняння:

1) $6x^3 - 24x = 0$;
2) $x^3 - 5x^2 + 9x - 45 = 0$;
3) $x^5 + 2x^4 + 8x + 16 = 0$;
4) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$.

СТАВАЙ ОСТРОГРАДСЬКИМ!

Видатний український математик Михайло Васильович Остроградський народився в селі Пашенівка на Полтавщині. У 1816–1820 рр. він навчався в Харківському університеті, а потім удосконалював математичну освіту, навчаючись у Франції у таких великих учених, як П'єр Симон Лаплас (1749–1827), Симеон Дені Пуассон (1781–1840), Огюстен Луї Коші (1789–1857), Жан Батист Жозеф Фур'є (1768–1830).

Серед величезної наукової спадщини, яку залишив нам Михайло Остроградський, значну роль відіграють роботи, пов'язані з дослідженням тригонометричних рядів і коливань. Багато важливих математичних теорем сьогодні носять ім'я Остроградського.

Крім наукових праць, Остроградський написав низку чудових підручників для молоді, зокрема «Програму і конспект тригонометрії». Сам Остроградський надавав питанню викладання тригонометрії такого великого значення, що це стало предметом доповіді в Академії наук.

Науковий авторитет Остроградського був настільки високим, що в ті часи, відправляючи молодь на навчання, говорили: «Ставай Остроградським!» Це побажання актуальне й сьогодні, тому

«Ставай Остроградським!»

Михайло Васильович Остроградський
(1801–1862)

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Радіанна міра кута

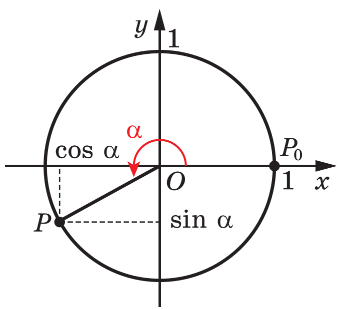
Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

Радіанна та градусна міри кута пов'язані формулами

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}, \quad 1^{\circ} = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{рад}.$$

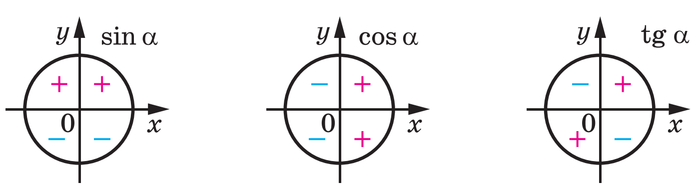
Косинус, синус і тангенс кута повороту

Косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки $P\ (x;\ y)$ одиничного кола, яку отримано в результаті повороту точки $P_0\,(1;\ 0)$ навколо початку координат на кут α.



Тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Знаки значень тригонометричних функцій



Періодичні функції

Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T називають періодом функції f.

Якщо серед усіх періодів функції f існує найменший додатний період, то його називають головним періодом функції f.

Зв'язок тригонометричних функцій одного й того самого аргументу

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$

$$1 + \text{tg}^2\, \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Формули додавання

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta;$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta;$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta;$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta;$

$$\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha\, \text{tg}\,\beta};$$

$$\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\, \text{tg}\,\beta}.$$

Формули зведення

Для того щоб записати будь-яку з формул зведення, можна керуватися такими правилами:

1) у правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) якщо в лівій частині формули аргумент має вигляд $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус замінюють на косинус і навпаки. Якщо аргумент має вигляд $\pi \pm \alpha$, то заміни функції не відбувається.

Формули подвійного аргументу

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Арккосинус, арксинус і арктангенс

Арккосинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b.

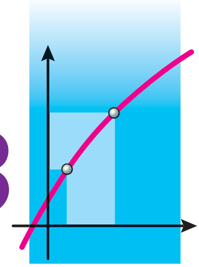
Арксинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b.

Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b.

Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

Рівняння	Формула коренів рівняння
$\cos x = b, \ |b| \leqslant 1$	$x = \pm\arccos b + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$
$\sin x = b, \ |b| \leqslant 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ §3



У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям похідної функції в точці; навчитеся застосовувати похідну для дослідження властивостей функцій і побудови графіків функцій.

18. Задачі про миттєву швидкість і дотичну до графіка функції

Якщо функція є математичною моделлю реального процесу, то часто виникає потреба знаходити різницю значень цієї функції у двох точках. Наприклад, позначимо через $f(t)$ і $f(t_0)$ суми коштів, які накопичилися на депозитному[1] рахунку вкладника до моментів часу t і t_0. Тоді різниця $f(t) - f(t_0)$, де $t > t_0$, показує прибуток, який отримає вкладник за час $t - t_0$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 — фіксована точка з області визначення функції f.

Якщо x — довільна точка області визначення функції f така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають **приростом аргументу функції f у точці** x_0 і позначають Δx (читають: «дельта ікс»)[2]. Маємо:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Звідси

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Говорять, що аргумент **отримав приріст Δx у точці x_0.**

Зазначимо, що приріст аргументу може бути як додатним, так і від'ємним: якщо $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; якщо $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Якщо аргумент у точці x_0 отримав приріст Δx, то значення функції f змінилося на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Цю різницю називають **приростом функції f у точці** x_0 і позначають Δf (читають: «дельта еф»).

Маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ або } \Delta f = f(x) - f(x_0).$$

---

[1] Депозитний — від *депозит* (банківський вклад) — кошти, які вкладник передає банку на деякий строк, за що банк виплачує вкладнику відсотки.

[2] Говорячи про приріст аргументу функції f у точці x_0, тут і далі припускатимемо, що в будь-якому проміжку виду $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ є точки області визначення функції f, відмінні від x_0.

Для приросту функції $y = f(x)$ прийнято також позначення Δy, тобто

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ або } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δf функції показано на рисунку 18.1.

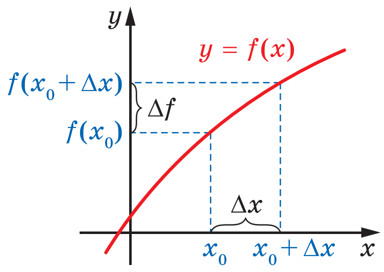


Рис. 18.1

Зауважимо, що для фіксованої точки x_0 приріст функції f у точці x_0 є функцією з аргументом Δx.

Задача. Знайдіть приріст функції $y = x^2$ у точці x_0, який відповідає приросту Δx аргументу.

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Відповідь: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ◄

Задача про миттєву швидкість

Нехай автомобіль, рухаючись прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку, за 2 год подолав шлях 120 км. Тоді його середня швидкість руху дорівнює: $v_{\text{сер}} = \frac{120}{2} = 60$ (км/год).

Знайдена величина дає неповне уявлення про характер руху автомобіля: на одних ділянках шляху автомобіль міг пересуватися швидше, на інших — повільніше, інколи міг зупинятися.

Разом із цим у будь-який момент часу спідометр автомобіля показував деяку величину — швидкість у даний момент часу. Значення швидкості в різні моменти повніше характеризують рух автомобіля.

Розглянемо задачу про пошук швидкості в даний момент часу на прикладі рівноприскореного руху.

Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час t після початку руху має координату $s(t)$. Тим самим задано функцію $y = s\,(t)$, яка дає змогу визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають **законом руху** точки.

Із курсу фізики відомо, що закон рівноприскореного руху задається формулою $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, де s_0 — координата точки на початку руху (при $t = 0$), v_0 — початкова швидкість, a — прискорення.

Нехай, наприклад, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с^2. Тоді $s\,(t) = t^2 + t$.

Зафіксуємо який-небудь момент часу t_0 і надамо аргументу в точці t_0 приріст Δt, тобто розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення Δs. Маємо:

$$\Delta s = s\,(t_0 + \Delta t) - s\,(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s\,(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{\left(t_0^2 + t_0\right)}_{s\,(t_0)} =$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Середня швидкість $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює відношенню $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Отримуємо:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ тобто } v_{\text{сер}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Позначення для середньої швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ наголошує, що при заданому законі руху $y = s\;(t)$ і фіксованому моменті часу t_0 значення середньої швидкості залежить тільки від Δt.

Якщо розглядати досить малі проміжки часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, то з практичних міркувань зрозуміло, що середні швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ за такі проміжки часу мало відрізняються одна від одної, тобто величина $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ майже не змінюється. Чим менше Δt, тим ближчим є значення середньої швидкості до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу t_0. Іншими словами, якщо значення Δt прямують до нуля (позначають $\Delta t \to 0$), то значення $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ прямують до числа $v\,(t_0)$. Число $v\,(t_0)$ називають **миттєвою швидкістю** в момент часу t_0. Це записують так: $v\,(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}}\,(\Delta t)$. Говорять, що число $v\,(t_0)$ є **границею** функції $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

Якщо в наведеному прикладі $\Delta t \to 0$, то значення виразу $2t_0 + 1 + \Delta t$ прямують до числа $2t_0 + 1$, яке є значенням миттєвої швидкості $v(t_0)$, тобто

$$v\,(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} (2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$, то її миттєву швидкість у момент часу t_0 визначають за допомогою формули

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}}(\Delta t), \text{ тобто}$$

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}$$

Задача про дотичну до графіка функції

Відоме означення дотичної до кола як прямої, що має з колом тільки одну спільну точку, незастосовне у випадку довільної кривої.

Наприклад, вісь ординат має з параболою $y = x^2$ тільки одну спільну точку (рис. 18.2). Проте інтуїція підказує, що неприродно вважати цю пряму дотичною до вказаної параболи. Разом з тим у курсі алгебри ми нерідко говорили, що парабола $y = x^2$ дотикається до осі абсцис у точці $x_0 = 0$.

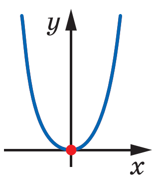


Рис. 18.2

Уточнимо наочне уявлення про дотичну до графіка функції.

Нехай M — деяка точка, що лежить на параболі $y = x^2$. Проведемо пряму OM, яку назвемо січною (рис. 18.3). Уявимо собі, що точка M, рухаючись по параболі, наближається до точки O. При цьому січна OM буде повертатися навколо точки O. Тоді кут між прямою OM та віссю абсцис ставатиме все меншим і меншим, а січна OM прагнутиме зайняти положення осі абсцис. Тому вісь абсцис вважають дотичною до параболи $y = x^2$ у точці O.

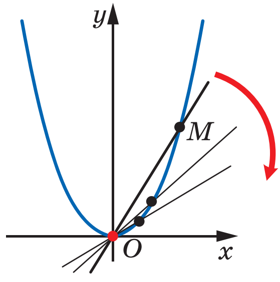


Рис. 18.3

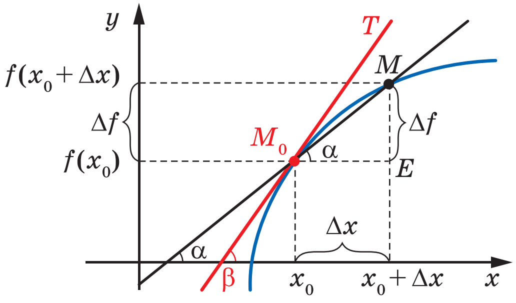


Рис. 18.4

Розглянемо графік деякої функції f і точку $M_0\,(x_0;\ f\,(x_0))$. У точці x_0 надамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку точку $M\ (x;\ f\,(x))$, де $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 18.4).

З рисунка видно, що коли Δx стає все менше й менше, то точка M, рухаючись по графіку, наближається до точки M_0. Якщо при $\Delta x \to 0$ січна M_0M прагне зайняти положення деякої прямої (на рисунку 18.4 це пряма M_0T), то таку пряму називають **дотичною до графіка функції f у точці M_0.**

Нехай січна M_0M має рівняння $y = kx + b$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α. Як відомо, кутовий коефіцієнт k прямої M_0M дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$, тобто $k = \operatorname{tg}\alpha$. Очевидно, що $\angle MM_0E = \alpha$ (рис. 18.4). Тоді з трикутника MM_0E отримуємо:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Уведемо позначення $k_{\text{січ}}\,(\Delta x)$ для кутового коефіцієнта січної M_0M, тим самим підкреслюючи, що для даної функції f і фіксованої точки x_0 кутовий коефіцієнт січної M_0M залежить тільки від приросту Δx аргументу.

Маємо: $k_{\text{січ}}\,(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}.$

Нехай дотична M_0T утворює з додатним напрямом осі абсцис кут β $(\beta \neq 90°)$. Тоді її кутовий коефіцієнт $k\,(x_0)$ дорівнює $\operatorname{tg}\beta$.

Природно вважати, що чим меншим є Δx, то тим менше значення кутового коефіцієнта січної відрізняється від значення кутового коефіцієнта дотичної. Іншими словами, якщо $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{січ}}\,(\Delta x) \to k\,(x_0)$. Узагалі, кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 визначають за допомогою формули

$$k\,(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{січ}}\,(\Delta x), \quad \text{тобто}$$

$$\boxed{k\,(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_0 + \Delta x) - f\,(x_0)}{\Delta x}}$$

1. Що називають приростом функції в точці?
2. За якою формулою визначають миттєву швидкість?
3. За якою формулою визначають кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції?

ВПРАВИ

18.1.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0, якщо:
1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0,2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$.

18.2.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0, якщо:
1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,3$;
2) $f(x) = 0,5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,8$.

18.3.° Для функції $f(x) = x^2 - 3x$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x. Знайдіть Δf, якщо:
1) $x_0 = 3$, $x = 2,5$;
2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

18.4.° Для функції $f(x) = x^3$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x. Знайдіть Δf, якщо $x_0 = 0,5$, $x = 0,4$.

18.5.• Для функції $f(x) = x^2 - x$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

18.6.• Для функції $f(x) = 5x + 1$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

18.7.• Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 + 3$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент $t_0 = 2$ с.

18.8.• Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 5t^2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть:
1) середню швидкість тіла при зміні часу від $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с;
2) миттєву швидкість тіла в момент $t_0 = 1$ с.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

18.9. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = 1$ і $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Знайдіть кут α.

18.10. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = -1$ і $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Знайдіть кут α.

19. Поняття похідної

У попередньому пункті, розв'язуючи дві різні задачі про миттєву швидкість матеріальної точки та про кутовий коефіцієнт дотичної, ми дійшли до однієї і тієї самої математичної моделі — границі відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \qquad (1)$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \qquad (2)$$

До аналогічних формул приводить розв'язування багатьох задач фізики, хімії, біології, економіки тощо. Це свідчить про те, що розглядувана модель заслуговує на особливу увагу. Їй варто дати назву, увести позначення, вивчити її властивості та навчитися їх застосовувати.

Означення. Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f'(x_0)$ (читають: «еф штрих від ікс нульового») або $y'(x_0)$. Можна записати:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

або

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Зважаючи на означення миттєвої швидкості (1), можна зробити такий висновок: *якщо $y = s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій, то її миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює значенню похідної функції $y = s(t)$ у точці t_0*, тобто

$$\boxed{v(t_0) = s'(t_0)}$$

Ця рівність виражає **механічний зміст похідної.**

З огляду на формулу для кутового коефіцієнта дотичної (2) можна зробити такий висновок: *кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, дорівнює значенню похідної функції f у точці x_0*, тобто

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Ця рівність виражає **геометричний зміст похідної.**

Якщо функція f має похідну в точці x_0, то цю функцію називають **диференційовною в точці** x_0.

Якщо функція f диференційовна в кожній точці області визначення, то її називають **диференційовною.**

Знаходження похідної функції f називають **диференціюванням** функції f.

Задача 1. Продиференціюйте функцію $f(x) = kx + b$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) за означенням похідної $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Отже, $f'(x_0) = k$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то остання рівність означає, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f'(x) = k$. ◄

Висновок про те, що похідна лінійної функції $f(x) = kx + b$ дорівнює k, записують також у вигляді

$$\boxed{(kx + b)' = k} \qquad (3)$$

Якщо у формулу (3) підставити $k = 1$ і $b = 0$, то отримаємо:

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Якщо ж у формулі (3) покласти $k = 0$, то отримаємо:

$$\boxed{(b)' = 0}$$

Остання рівність означає, що *похідна функції, яка є константою, у кожній точці дорівнює нулю*.

Задача 2. Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$;

3) якщо $\Delta x \to 0$, то при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$ значення виразу $2x_0 + \Delta x$ прямують до числа $2x_0$. Отже, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x. \text{ ◄}$$

Останню рівність записують також у вигляді

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \qquad (4)$$

Формула (4) — окремий випадок більш загальної формули

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1} \qquad (5)$$

Наприклад, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

Формула (5) залишається справедливою для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ і $x \neq 0$, тобто

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}} \qquad (6)$$

Наприклад, скористаємося формулою (6) для знаходження похідної функції $f(x) = \frac{1}{x}$. Маємо:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Отже, для будь-якого $x \neq 0$ виконується рівність $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ або

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Формулу (6) також можна узагальнити для будь-якого $r \in \mathbb{Q}$ і $x > 0$:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{Q}} \qquad (7)$$

Наприклад, знайдемо похідну функції $f(x) = \sqrt{x}$, скориставшись формулою (7). Маємо: $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Отже, для $x > 0$ можна записати: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ або

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Узагалі, похідну функції $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, можна знаходити за формулою

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}} \qquad (8)$$

Якщо n — непарне натуральне число, то формула (8) дає змогу знаходити похідну функції f у всіх точках x таких, що $x \neq 0$.

Якщо n — парне натуральне число, то формула (8) дає змогу знаходити похідну функції f для всіх додатних значень x.

Звернемося до тригонометричних функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Ці функції є диференційовними, і їхні похідні знаходять за такими формулами:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

Під час обчислювання похідних зручно користуватися таблицею похідних, розміщеною на форзаці 2.

ВПРАВИ

19.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = 9$; 3) $y = 8 - 3x$.

19.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^4$; 2) $y = x^{-15}$; 3) $y = \dfrac{1}{x^{17}}$; 4) $y = x^{\frac{1}{5}}$.

19.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^{10}$; 2) $y = \dfrac{1}{x^8}$; 3) $y = x^{\frac{7}{6}}$; 4) $y = x^{-0,2}$.

19.4.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = x^{-2}$, $x_0 = -2$.

19.5.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{4}$.

19.6.• Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

19.7.• Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

19.8.• Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

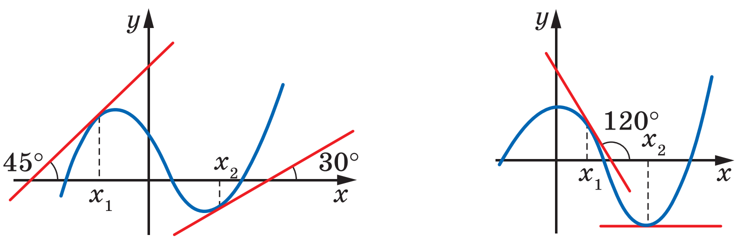
1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; 4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

19.9.• Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;
4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

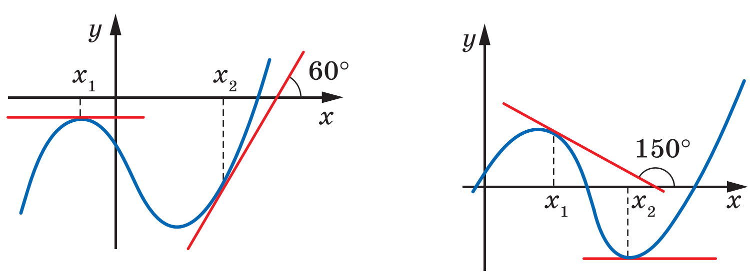
19.10.• Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 19.1) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.



а *б*

Рис. 19.1

19.11.• Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 19.2) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.



а *б*

Рис. 19.2

19.12.•• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_0 = 81$;
2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 16$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[6]{x}}$, $x_0 = 64$.

19.13.•• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x}$, $x_0 = 256$;
2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

19.14. Спростіть вираз $\left(\frac{a+5}{a^2-81}+\frac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\frac{a-9}{a+3}\right)^2+\frac{7+a}{9+a}$.

19.15. Розв'яжіть рівняння $\frac{5}{x^2-4x+4}-\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}=0$.

20. Правила обчислення похідних

Під час обчислювання похідних зручно користуватися такими теоремами[1].

Теорема 20.1 (похідна суми). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$, також є диференційовною функція $y=f(x)+g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x).$$

Коротко говорять: *похідна суми дорівнює сумі похідних*.

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(f+g)'=f'+g'}$$

Теорему 20.1 можна узагальнити для будь-якої скінченної кількості доданків:

$$(f_1+f_2+\ldots+f_n)'=f_1'+f_2'+\ldots+f_n'.$$

Теорема 20.2 (похідна добутку). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y=f(x)$ і $y=g(x)$, також є диференційовною функція $y=f(x)\,g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x)\,g(x))'=f'(x)\,g(x)+g'(x)\,f(x).$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(fg)'=f'g+g'f}$$

---

[1] Умови теорем 20.1–20.3 передбачають таке: якщо функції f і g є диференційовними в точці x_0, то відповідно функції $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)\,g(x)$ та $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ визначені на деякому проміжку, що містить точку x_0.

Наслідок 1. ***У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k — деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорять: *постійний множник можна виносити за знак похідної*.

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

Доведення. Оскільки функція $y = k$ є диференційовною в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

Наслідок 2. ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) - g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

Доведення. Маємо:

$$(f(x) - g(x))' = (f(x) + (-1) \cdot g(x))' = (f(x))' + ((-1) \cdot g(x))' =$$
$$= f'(x) + (-1) \cdot g'(x) = f'(x) - g'(x). \blacktriangleleft$$

Теорема 20.3 (похідна частки). ***У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційовними та значення функції g не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2}.$$

Також прийнято такий спрощений запис:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

Задача. Знайдіть похідну функції: 1) $y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$; 3) $y = x^3 \cos x$; 4) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$.

Розв'язання. 1) Користуючись теоремою про похідну суми та наслідками з теореми про похідну добутку, отримуємо:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) За теоремою про похідну добутку отримуємо:

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}(5x-3)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot (5x-3) + (5x-3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x-3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3-5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3-5x+10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3+5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3) Маємо:

$$y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 =$$

$$= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

4) За теоремою про похідну частки отримуємо:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2) - (3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x(3x-2) - 3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2 - 8x - 6x^2 - 3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3}{(3x-2)^2}. \blacktriangleleft$$

Використовуючи теорему про похідну частки, легко довести, що

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Справді, $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Сформулюйте теорему про похідну: 1) суми; 2) добутку; 3) частки.

ВПРАВИ

20.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$; 2) $y = 4x^6 + 20\sqrt{x}$;

3) $y = x^8 + 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$; 5) $y = \text{tg } x - 9x$;

4) $y = 4 \sin x - 5 \cos x$; 6) $y = 2x^{-2} + 3x^{-3}$.

20.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 2x^5 - x$; 3) $y = -3 \sin x + 2 \cos x$;

2) $y = x^7 - 4\sqrt{x}$; 4) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$.

20.3.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = (3x + 5)(2x^2 - 1)$; 3) $y = (2x + 1)\sqrt{x}$;

2) $y = x^2 \sin x$; 4) $y = \sqrt{x} \cos x$.

20.4.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$; 3) $y = x^4 \cos x$;

2) $y = (x + 5)\sqrt{x}$; 4) $y = x \text{ tg } x$.

20.5.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{x - 1}{x + 1}$; 3) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 5) $y = \frac{3 - x^2}{4 + 2x}$;

2) $y = \frac{5}{3x - 2}$; 4) $y = \frac{x^3}{\cos x}$; 6) $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 7}$.

20.6.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{3x + 5}{x - 8}$; 3) $y = \frac{2x^2}{1 - 6x}$; 5) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

2) $y = \frac{7}{10x - 3}$; 4) $y = \frac{\sin x}{x}$; 6) $y = \frac{x^2 + 6x}{x + 2}$.

20.7.• Чому дорівнює значення похідної функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2,\ x_0 = 2$; 4) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x},\ x_0 = 9$;

2) $f(x) = \frac{2 - 3x}{x + 2},\ x_0 = -3$; 5) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x},\ x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2} - 2 \sin x,\ x_0 = 0$; 6) $f(x) = x \sin x,\ x_0 = 0$?

20.8.• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x,\ x_0 = \frac{1}{4}$; 3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3},\ x_0 = 2$;

2) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - x},\ x_0 = 0$; 4) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1},\ x_0 = 1$.

20.9.•• Матеріальна точка масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2 + 4$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $P(t) = mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 2$ с.

20.10.•• Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть кінетичну енергію $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тіла в момент часу $t_0 = 4$ с.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

20.11. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2; -3)$ і паралельна осі абсцис.

20.12. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку $M(1; -4)$, якщо кутовий коефіцієнт цієї прямої дорівнює: 1) 4; 2) 0; 3) −1.

21. Рівняння дотичної

Нехай функція f є диференційовною в точці x_0. Тоді до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (рис. 21.1).

З курсу геометрії 9 класу ви знаєте, що рівняння невертикальної прямої має вигляд $y = kx + b$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої.

Зважаючи на геометричний зміст похідної, отримуємо:

$$k = f'(x_0).$$

Тоді рівняння дотичної можна записати в такому вигляді:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Ця пряма проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$. Отже, координати цієї точки задовольняють рівняння (1). Маємо:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b.$$

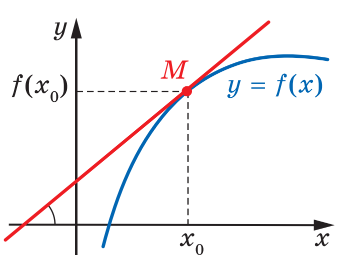


Рис. 21.1

Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$.

Тоді рівняння (1) можна переписати так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Отже, якщо функція f диференційовна в точці x_0, то **рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0**, має вигляд

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Задача. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2;$

$$f'(x) = -4 - 6x;$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8.$$

Підставивши знайдені числові значення в рівняння дотичної, отримуємо: $y = 8(x + 2) - 2$, тобто $y = 8x + 14$.

Відповідь: $y = 8x + 14$. ◄

Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0.

ВПРАВИ

21.1.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 3x,\ x_0 = -1;$
2) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = \frac{1}{2};$
3) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3,\ x_0 = 9;$
4) $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0;$
5) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \pi;$
6) $f(x) = \frac{x}{x+1},\ x_0 = -2.$

21.2.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x,\ x_0 = 1;$
2) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2,\ x_0 = 0;$
3) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2};$
4) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2},\ x_0 = 3.$

21.3.• Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - 3x - 3$ у точці його перетину з віссю ординат.

21.4.• Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ у точці його перетину з віссю ординат.

21.5.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

1) $f(x) = 8x^3 - 1;$
2) $f(x) = x - \frac{1}{x}.$

21.6.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

1) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; 2) $f(x) = 3x - x^2$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

21.7. Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + x - 12 > 0$;
2) $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$;
3) $6x - x^2 \geqslant 0$;
4) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x + 9} \leqslant 0$.

22. Ознаки зростання і спадання функції

Ви знаєте, що коли функція є константою, то її похідна дорівнює нулю. Виникає запитання: якщо функція f є такою, що для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то чи є функція f константою на проміжку I?

Теорема 22.1 (ознака сталості функції). ***Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.***

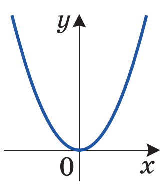


Рис. 22.1

На рисунку 22.1 зображено графік функції $f(x) = x^2$. Ця функція має такі властивості: на проміжку $(-\infty; 0)$ вона спадає, а на проміжку $(0; +\infty)$ зростає. При цьому на проміжку $(-\infty; 0)$ похідна $f'(x) = 2x$ набуває від'ємних значень, а на проміжку $(0; +\infty)$ — додатних значень.

Цей приклад показує, що знак похідної функції на деякому проміжку I пов'язаний з тим, чи є ця функція зростаючою (спадною) на проміжку I.

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням) функції установлюють такі дві теореми.

Теорема 22.2 (ознака зростання функції). ***Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.***

Теорема 22.3 (ознака спадання функції). ***Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.***

Задача 1. Знайдіть проміжки зростання (спадання) функції $f(x) = x^2 - 2x$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = 2x - 2$. Розв'язавши нерівності $2x - 2 > 0$ і $2x - 2 < 0$, доходимо висновку: $f'(x) > 0$ на проміжку $(1; +\infty)$; $f'(x) < 0$ на проміжку $(-\infty; 1)$. Отже, функція f зростає на проміжку $(1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 1)$.

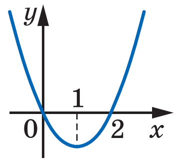


Рис. 22.2

На рисунку 22.2 зображено графік функції $f(x) = x^2 - 2x$. З рисунка видно, що насправді функція f зростає на проміжку $[1; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 1]$, включаючи точку $x = 1$.

Записуючи відповідь, керуватимемося таким правилом: якщо функція є диференційовною в якомусь із кінців проміжку зростання (спадання), то цю точку приєднують до цього проміжку. У наведеному прикладі функція $f(x) = x^2 - 2x$ є диференційовною в точці $x = 1$, тому цю точку приєднали до проміжків $(1; +\infty)$ і $(-\infty; 1)$.

Відповідь: зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 1]$. ◄

Задача 2. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

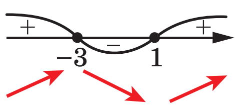


Рис. 22.3

Дослідимо знак похідної (рис. 22.3) та врахуємо диференційовність функції f у точках $x = -3$ і $x = 1$. Отримуємо, що функція f зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$ та спадає на проміжку $[-3; 1]$. ◄

1. Сформулюйте ознаку сталості функції.
2. Сформулюйте ознаку зростання функції.
3. Сформулюйте ознаку спадання функції.

ВПРАВИ

22.1.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

22.2.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:
1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = x^4 + 4x - 20$;
4) $f(x) = 8 - 4x - x^3$.

22.3.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:
1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;
2) $f(x) = \frac{3x+5}{2-x}$;
3) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;
4) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;
5) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$;
6) $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$.

22.4.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:
1) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;
2) $f(x) = \frac{2x-9}{x-5}$;
3) $f(x) = \frac{x^2+5x}{x-4}$.

22.5.• На рисунку 22.4 зображено графік похідної функції f, диференційовної на множині дійсних чисел. Укажіть проміжки спадання функції f.

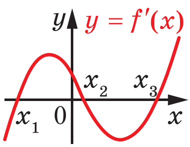


Рис. 22.4

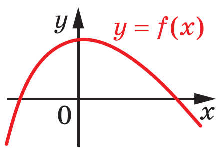


Рис. 22.5

22.6.•• На рисунку 22.5 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Серед наведених на рисунку 22.6 графіків укажіть той, який може бути графіком функції $y = f'(x)$.

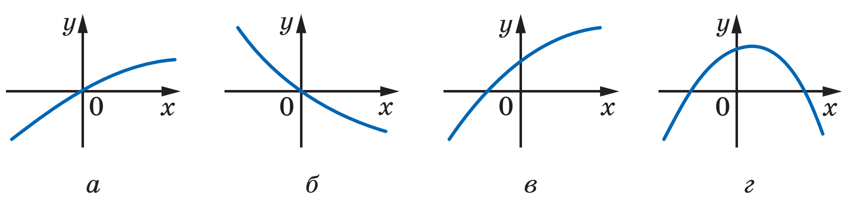


Рис. 22.6

22.7.•• Доведіть, що функція $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ є спадною.

22.8.•• Доведіть, що функція $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$ є зростаючою.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

22.9. Розв'яжіть рівняння $1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$.

22.10. Розв'яжіть нерівність $x\sqrt{7-x}>0$.

23. Точки екстремуму функції

Ознайомлюючись із поняттям диференційовності функції в точці, ми досліджували поведінку функції поблизу цієї точки або, як прийнято говорити, у її **околі**.

Означення. Проміжок $(a; b)$, який містить точку x_0, називають околом точки x_0.

Наприклад, проміжок $(-1; 3)$ — один з околів точки 2,5. Разом з тим цей проміжок не є околом точки 3.

На рисунку 23.1 зображено графіки двох функцій. Ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.

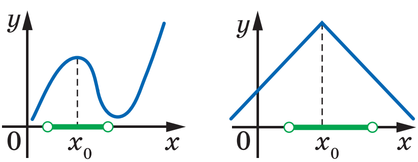


Рис. 23.1

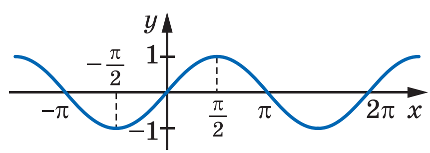


Рис. 23.2

Означення. Точку x_0 називають точкою максимуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Наприклад, точка $x_0=\frac{\pi}{2}$ є точкою максимуму функції $y=\sin x$ (рис. 23.2). Записують: $x_{max}=\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 23.1 $x_{max}=x_0$.

Означення. Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Наприклад, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ є точкою мінімуму функції $y = \sin x$ (рис. 23.2). Записують: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 23.3 зображено графіки функцій, для яких x_0 є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = x_0$.

Рис. 23.3

Точки максимуму і мінімуму мають спільну назву: їх називають **точками екстремуму** функції (від латинського *extremum* — край, кінець).

На рисунку 23.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 є точками екстремуму.

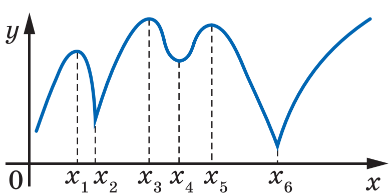


Рис. 23.4

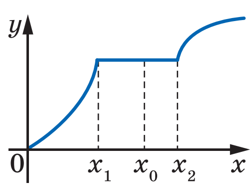


Рис. 23.5

На рисунку 23.5 зображено графік функції f, яка на проміжку $[x_1; x_2]$ є константою. Точка x_1 є точкою максимуму, точка x_2 — мінімуму, а будь-яка точка проміжку $(x_1; x_2)$ є одночасно як точкою максимуму, так і точкою мінімуму функції f.

а *б*

Рис. 23.6

Наявність екстремуму функції в точці x_0 пов'язана з поведінкою функції в околі цієї точки. Так, для функцій, графіки яких зображено на рисунку 23.6, маємо: на рисунку 23.6, *а* функція зростає на проміжку $(a;\ x_0]$ і спадає на проміжку $[x_0;\ b)$; на рисунку 23.6, *б* функція спадає на проміжку $(a;\ x_0]$ і зростає на проміжку $[x_0;\ b)$.

Ви знаєте, що за допомогою похідної можна знаходити проміжки зростання (спадання) диференційовної функції. Дві теореми, наведені нижче, показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму диференційовної функції.

Теорема 23.1 (ознака точки максимуму функції). ***Нехай функція f є диференційовною на проміжку $(a;\ b)$ і x_0 — деяка точка цього проміжку. Якщо для всіх $x \in (a;\ x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, а для всіх $x \in [x_0;\ b)$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f*** (рис. 23.6, *а*).

Теорема 23.2 (ознака точки мінімуму функції). ***Нехай функція f є диференційовною на проміжку $(a;\ b)$ і x_0 — деяка точка цього проміжку. Якщо для всіх $x \in (a;\ x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, а для всіх $x \in [x_0;\ b)$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f*** (рис. 23.6, *б*).

Інколи зручно користуватися спрощеними формулюваннями цих двох теорем: *якщо при переході через точку x_0 похідна змінює знак з плюса на мінус, то x_0 — точка максимуму*; *якщо похідна змінює знак з мінуса на плюс, то x_0 — точка мінімуму*.

Отже, для функції f точки екстремуму можна шукати за такою схемою.

1) Знайти $f'(x)$.

2) Дослідити знак похідної.

3) Користуючись відповідними теоремами, знайти точки екстремуму.

Задача. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2).$$

Досліджмо знак похідної в околах точок $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 23.7). Отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.

Рис. 23.7

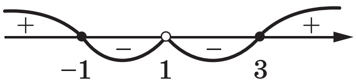


Рис. 23.8

2) Маємо: $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 4)'(x-1) - (x-1)'(x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} =$

$= \dfrac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 4)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$

Розв'язуючи нерівність $x^2 - 2x - 3 > 0$ і враховуючи, що $(x-1)^2 > 0$ при $x \neq 1$, отримуємо, що $f'(x) > 0$ на проміжках $(-\infty; -1)$ і $(3; +\infty)$. Міркуючи аналогічно, можна встановити, що $f'(x) < 0$ на проміжках $(-1; 1)$ і $(1; 3)$. Рисунок 23.8 ілюструє отримані результати.

Тепер можна зробити такі висновки: $x_{max} = -1$, $x_{min} = 3$. ◀

?

1. Який проміжок називають околом точки x_0?
2. Яку точку називають точкою максимуму функції? точкою мінімуму функції?
3. Сформулюйте ознаку точки максимуму; точки мінімуму.

ВПРАВИ

23.1.° На рисунку 23.9 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-10; 9]$. Укажіть:
1) точки мінімуму;
2) точки максимуму.

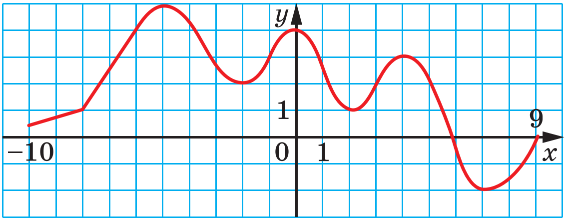


Рис. 23.9

23.2.° На рисунку 23.10 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-7; 7]$. Укажіть:
1) точки мінімуму;
2) точки максимуму.

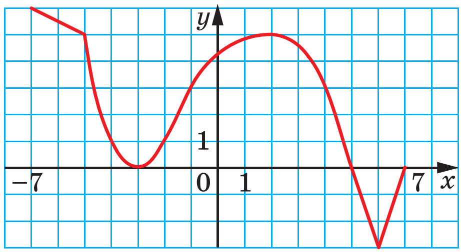


Рис. 23.10

23.3.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = 0{,}5x^4$;
3) $f(x) = 12x - x^3$;
2) $f(x) = x^2 - 6x$;
4) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$.

23.4.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$;
3) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;
2) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$;
4) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$.

23.5.• Функція $y = f(x)$ диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку 23.11 зображено графік її похідної. Укажіть точки максимуму і мінімуму функції $y = f(x)$.

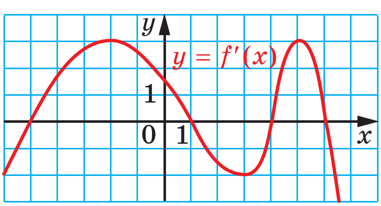


Рис. 23.11

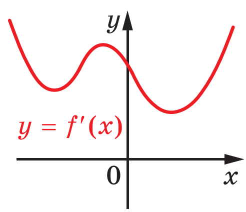


Рис. 23.12

23.6.• Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел і має похідну в кожній точці області визначення. На рисунку 23.12 зображено графік функції $y = f'(x)$. Скільки точок екстремуму має функція $y = f(x)$?

23.7.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$.

23.8.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$; 3) $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

23.9. Знайдіть найменше значення функції $y = 3x^2 - 18x + 2$ на проміжку:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

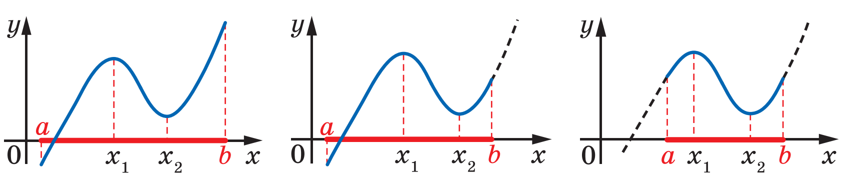
23.10. Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 - 8x + 10$ на проміжку:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

24. Найбільше і найменше значення функції

Яку кількість продукції треба випустити підприємству, щоб отримати найбільший прибуток? Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання в найкоротший час? Як організувати доставку товару в торговельні точки так, щоб витрати палива були найменшими? Такі й подібні задачі на пошук оптимального розв'язку займають значне місце в практичній діяльності людини.

У цьому пункті ми з'ясуємо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції на проміжку $[a; b]$. Обмежимося розглядом лише диференційовних функцій.



$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ *а*

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$ *б*

$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$ *в*

Рис. 24.1

Можна показати, що диференційовна на проміжку $[a; b]$ функція набуває на цьому проміжку найбільшого і найменшого значень або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму (рис. 24.1).

Зважаючи на це, пошук найбільшого і найменшого значень диференційовної функції на проміжку $[a; b]$ можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти точки функції f, у яких її похідна дорівнює нулю.

2. Обчислити значення функції в тих знайдених точках, які належать розглядуваному проміжку, і на кінцях цього проміжку.

3. З усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Задача 1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на проміжку $[-2; 0]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну даної функції. Маємо:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12.$$

Тепер розв'яжемо рівняння $12x^2 - 18x - 12 = 0$. Звідси

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{1}{2}.$$

Проміжку $[-2; 0]$ належить тільки точка $x = -\frac{1}{2}$.

Маємо: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Отже, $\max\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Відповідь: $\frac{37}{4}$; -38. ◄

Задача 2. Подайте число 8 у вигляді суми двох невід'ємних чисел так, щоб сума куба першого числа та квадрата другого числа була найменшою.

Розв'язання. Нехай перше число дорівнює x, тоді друге число дорівнює $8 - x$. З умови випливає, що $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + (8 - x)^2 = x^3 + 64 - 16x + x^2$, визначену на проміжку $[0; 8]$, і знайдемо, при якому значенні x вона набуває найменшого значення.

Маємо: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$. Розв'яжемо рівняння $3x^2 + 2x - 16 = 0$. Отримуємо: $x = 2$ або $x = -\frac{8}{3}$.

Серед знайдених коренів проміжку $[0; 8]$ належить тільки число 2. Маємо:

$$f(2) = 44,\ f(0) = 64,\ f(8) = 512.$$

Отже, функція f набуває найменшого значення при $x = 2$.

Відповідь: $8 = 2 + 6$. ◄

Опишіть, як знайти найбільше і найменше значення диференційовної функції на проміжку $[a; b]$.

ВПРАВИ

24.1.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному проміжку:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$;
3) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1; 4]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$, $[-3; 0]$.

24.2.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному проміжку:

1) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0; 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2; 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2; 1]$;
4) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 8x^2$, $[-1; 2]$.

24.3.•• Подайте число 8 у вигляді суми двох таких невід'ємних чисел, щоб добуток одного із цих чисел і куба другого числа був найбільшим.

24.4.•• Подайте число 12 у вигляді суми двох таких невід'ємних чисел, щоб добуток квадрата одного із цих чисел і подвоєного другого числа був найбільшим.

24.5.•• Подайте число 180 у вигляді суми трьох невід'ємних доданків так, щоб два з них відносились як 1 : 2, а добуток усіх трьох доданків був найбільшим.

24.6.•• Подайте число 18 у вигляді суми трьох невід'ємних чисел так, щоб два з них відносились як 8 : 3, а сума кубів цих трьох чисел була найменшою.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

24.7. Накресліть графік якої-небудь функції, що має такі властивості: областю визначення є проміжок $[-3; 4]$; областю значень є проміжок $[-2; 3]$; нулі функції дорівнюють -1 і 2; $f'(x) > 0$ для будь-якого x із проміжків $[-3; 0)$ і $(2; 4]$; $f'(x) < 0$ для будь-якого x із проміжку $(0; 2)$.

25. Побудова графіків функцій

Коли в попередніх класах вам доводилося будувати графіки, ви зазвичай поступали так: позначали на координатній площині деяку кількість точок, які належать графіку, а потім сполучали їх. Точність побудови залежала від кількості позначених точок.

На рисунку 25.1 зображено кілька точок, які належать графіку деякої функції $y = f(x)$. Ці точки можна сполучити по-різному, наприклад так, як показано на рисунках 25.2 і 25.3.

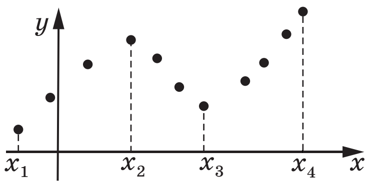


Рис. 25.1

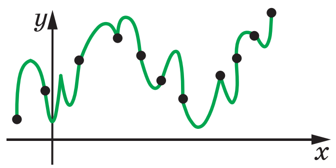


Рис. 25.2

Проте якщо знати, що функція f зростає на кожному з проміжків $[x_1; x_2]$ і $[x_3; x_4]$, спадає на проміжку $[x_2; x_3]$ і є диференційовною, то скоріше за все буде побудовано графік, зображений на рисунку 25.4.

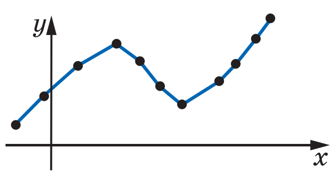


Рис. 25.3

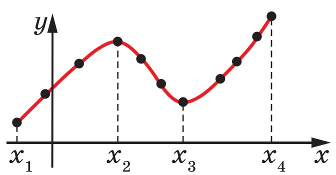


Рис. 25.4

Ви знаєте, які особливості притаманні графікам парної, непарної, періодичної функцій тощо. Узагалі, чим більше властивостей функції вдається з'ясувати, тим точніше можна побудувати її графік.

Дослідження властивостей функції проводитимемо за таким планом.

1. *Знайти область визначення функції.*
2. *Дослідити функцію на парність.*
3. *Знайти нулі функції.*
4. *Знайти проміжки зростання і спадання функції.*
5. *Знайти точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.*

6. *Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).*

Зауважимо, що наведений план дослідження носить рекомендаційний характер та не є сталим і вичерпним. Під час дослідження функції важливо виявити такі її властивості, які дадуть змогу коректно побудувати графік.

Задача. Дослідіть функцію $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині дійсних чисел, тобто $D(f)=\mathbb{R}$.

2. Маємо: $f(-x)=\frac{3}{2}(-x)^2-\frac{1}{4}(-x)^3=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3$. Звідси $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$, тобто функція $y=f(-x)$ не збігається ні з функцією $y=f(x)$, ні з функцією $y=-f(x)$. Таким чином, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3. Маємо: $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3=\frac{x^2}{4}(6-x)$. Числа 0 і 6 є нулями функції f.

4–5. Маємо: $f'(x)=3x-\frac{3x^2}{4}=\frac{3x}{4}(4-x)$. Дослідивши знак похідної (рис. 25.5), доходимо висновку, що функція f зростає на проміжку $[0; 4]$, спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$ і $[4; +\infty)$. Отже, $x_{max}=4$, $x_{min}=0$. Маємо: $f(4)=8$, $f(0)=0$.

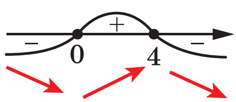


Рис. 25.5

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 25.6). ◀

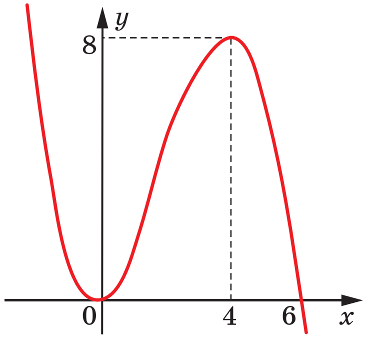


Рис. 25.6

Опишіть план дослідження властивостей функції.

ВПРАВИ

25.1.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть дану функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2;$
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5;$
3) $f(x) = 3x - \dfrac{x^3}{9};$
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2;$
5) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x^3.$

25.2.$^{\bullet\bullet}$ Дослідіть дану функцію та побудуйте її графік:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2;$
2) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{3}x^3;$
3) $f(x) = x - x^3.$

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Приріст аргументу x у точці x_0

$\Delta x = x - x_0$

Приріст функції f у точці x_0

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ або $\Delta f = f(x) - f(x_0)$

Похідна функції

Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{або} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Геометричний зміст похідної

Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, дорівнює значенню похідної функції f у точці x_0.

Механічний зміст похідної

Якщо $y = s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій, то її миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює значенню похідної функції $y = s(t)$ у точці t_0.

Диференційовність функції

Якщо функція має похідну в деякій точці, то її називають диференційовною в цій точці.

Якщо функція f диференційовна в кожній точці області визначення, то говорять, що вона є диференційовною.

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Правила обчислення похідних

Похідна суми	$(f+g)' = f' + g'$
Похідна добутку	$(fg)' = f'g + g'f$
Похідна частки	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Ознака сталості функції

Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція f є константою на цьому проміжку.

Ознака зростання функції

Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.

Ознака спадання функції

Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.

Окіл точки

Проміжок $(a; b)$, який містить точку x_0, називають околом точки x_0.

Точки екстремуму функції

Точку x_0 називають точкою максимуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Точки максимуму і мінімуму називають точками екстремуму функції.

Ознаки точок максимуму і мінімуму

Нехай функція f є диференційовною на проміжку $(a; b)$ і x_0 — деяка точка цього проміжку.

Якщо для всіх $x \in (a; x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f.

Якщо для всіх $x \in (a; x_0]$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, а для всіх $x \in [x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f.

План дослідження властивостей функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки зростання і спадання функції.
5. Знайти точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.
6. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

26. Вправи для повторення курсу алгебри і початків аналізу 10 класу

1. Функції, їхні властивості та графіки

26.1. Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{x-5}$;
2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x}}$;
3) $f(x)=\frac{9}{x^2-5}$;
4) $f(x)=\frac{14}{x^2+4}$;
5) $f(x)=\frac{7x+13}{x^2-7x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x+5}+\sqrt{3-x}$.

26.2. Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=\sqrt{x}+1$;
2) $f(x)=\sqrt{x}-2$;
3) $g(x)=3-x^2$;
4) $f(x)=x^2+2$.

26.3. Знайдіть область визначення та побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$;
2) $f(x)=\frac{x^2-6x+9}{3-x}$.

26.4. Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=\sqrt{x+7}$;
2) $f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x-1}$;
3) $f(x)=\sqrt{x^2-6}$;
4) $f(x)=(x-3)\sqrt{x-4}$.

26.5. Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x)=7x^6$;
2) $f(x)=3x^5-2x^7$;
3) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$;
4) $f(x)=x^2-x+1$;
5) $f(x)=\frac{1}{x^3-x}$.

26.6. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}\cdot\sqrt[5]{-\frac{32}{243}}+\left(-3\sqrt[3]{6}\right)^3$;
2) $\sqrt[3]{10+\sqrt{73}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{73}}$.

26.7. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[4]{3x-5}$; 2) $y=\sqrt[6]{-x}$; 3) $y=\sqrt[5]{x-4}$; 4) $y=\sqrt[8]{6x-x^2}$.

26.8. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{a^6}$, якщо $a\geqslant 0$; 2) $\sqrt[4]{b^4}$, якщо $b\leqslant 0$; 3) $\sqrt[7]{c^7}$.

26.9. Побудуйте графік функції:

1) $y=\left(\sqrt[7]{x-2}\right)^7$; 2) $y=\sqrt[7]{(x-2)^7}$; 3) $y=\left(\sqrt[8]{x-2}\right)^8$; 4) $y=\sqrt[8]{(x-2)^8}$.

26.10. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{(2-\sqrt{7})^4}-\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[5]{(7-\sqrt{35})^5}-\sqrt[6]{(\sqrt{35}-6)^6}$.

26.11. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{a^{11}}$; 2) $\sqrt[4]{162m^{10}n^7}$; 3) $\sqrt[4]{-243y^5}$.

26.12. Порівняйте числа:

1) $\sqrt[6]{80}$ і $\sqrt[3]{9}$; 2) $\sqrt[3]{6}$ і $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt[4]{15}$ і $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[4]{27}$ і $\sqrt[3]{9}$.

26.13. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[6]{a}-2}{\sqrt[3]{a}-4}$; 3) $\dfrac{m-\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt{m}-\sqrt[4]{m}}$.

26.14. Обчисліть значення виразу:

1) $3^{1,2}\cdot 3^{-0,7}\cdot 3^{1,5}$;

2) $11^{-\frac{4}{3}}\cdot 11^{-\frac{3}{4}}\cdot 11^{\frac{1}{12}}$;

3) $36^{0,7}\cdot 6^{-0,4}$;

4) $\dfrac{27^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$;

5) $0,125^{-\frac{1}{3}}+0,81^{-\frac{1}{2}}-0,216^{-\frac{2}{3}}$.

26.15. Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{m-n}{m^{\frac{3}{4}}+m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\left(\dfrac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}=m^{\frac{1}{4}}-n^{\frac{1}{4}}$;

2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$.

26.16. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4x+20}=x+2$;

2) $\sqrt{6-x}=3x-4$;

3) $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$;

4) $\sqrt{2x^2-14x+13}=5-x$;

5) $\sqrt{x+11}-\sqrt{3x+7}=2$;

6) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{3-x}=4$;

7) $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-5=0$;

8) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}+2\sqrt[3]{x-2}-3=0$.

2. Тригонометричні функції

26.17. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 168°\cos 126°$; 2) $\operatorname{tg} 206°\cos(-223°)$.

26.18. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 780°$; 2) $\cos 1200°$; 3) $\cos\dfrac{11\pi}{6}$.

26.19. Обчисліть $\sin \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

26.20. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $2 \cos^2 \alpha - 3 \sin^2 \alpha$.

26.21. Спростіть вираз

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(2\pi - \alpha).$$

26.22. Дано: $\sin \alpha = -0{,}8$, $\cos \beta = 0{,}6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Знайдіть $\cos(\alpha + \beta)$.

26.23. Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{2 \sin \alpha \cos \beta - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$;

2) $\dfrac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

26.24. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

2) $\sin 6\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + 2 \cos^2 3\alpha$;

3) $\cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$;

4) $\dfrac{2 \cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 1}{\sin 2\alpha - \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}$.

26.25. Розв'яжіть рівняння:

1) $2 \sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + 2 = 0$;

2) $2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$;

3) $3 + \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = -1$.

26.26. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

26.27. Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

26.28. Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1$ належать проміжку $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$?

26.29. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos^2 x=3\sin x+2$;
2) $\cos 2x+\sin x=0$;
3) $2\cos 2x-3\cos x+2=0$;
4) $3\operatorname{tg}^2 x-8\cos^2 x+1=0$;
5) $\sin x+2\cos x=0$;
6) $\sin x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$.

3. Похідна та її застосування

26.30. Знайдіть похідну функції:

1) $y=3x^4-2x^2+5$;
2) $y=4x^3-\frac{2}{x}$;
3) $y=\frac{3}{x}-2\sqrt{x}+7$;
4) $y=5\sin x-7\cos x$.

26.31. Знайдіть похідну функції:

1) $y=(x^2-1)(x^5+2)$;
2) $y=x^3\sin x$;
3) $y=\sqrt[3]{x}\cos x$;
4) $y=\frac{2x+3}{3x-2}$;
5) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+2}$;
6) $y=\frac{x^2-3x}{\cos x}$.

26.32. Знайдіть абсцису точки графіка функції $f(x)=x^2-5x$, у якій дотична до цього графіка утворює з додатним напрямом осі абсцис кут $45°$.

26.33. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x)=\frac{x-2}{x^2+1}$ у точці його перетину з віссю ординат.

26.34. Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x)=x^3+x$, $x_0=-1$;
2) $f(x)=x^2-\sqrt{x}$, $x_0=4$;
3) $f(x)=\frac{x+2}{x-4}$, $x_0=3$;
4) $f(x)=\sin x$, $x_0=-\frac{\pi}{3}$.

26.35. Складіть рівняння дотичних до графіка функції $f(x)=x^2-4x$ у точках його перетину з віссю абсцис.

26.36. Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t)=t^2+3t-2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). У який момент часу t швидкість руху тіла становить 10 м/с?

26.37. Доведіть, що функція $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 5$ є зростаючою.

26.38. Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $y = 3x - x^3$;
2) $y = \frac{x^5}{5} - x^4 - 3$;
3) $y = x + \frac{16}{x}$;
4) $y = x + \frac{4}{x^2}$;
5) $y = x^2(x - 3)$;
6) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

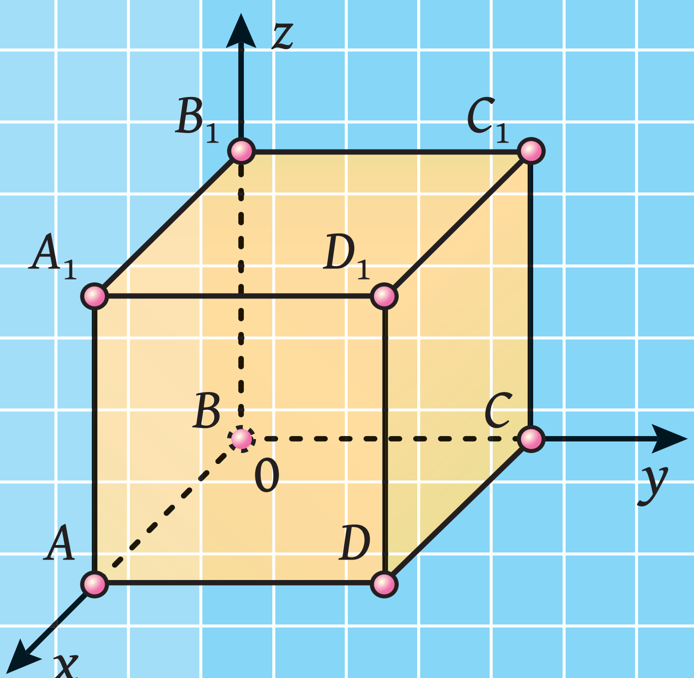
26.39. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному проміжку:

1) $f(x) = x^3 - 3x$, $[-2; 0]$;
2) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$, $[-2; 4]$.

26.40. Подайте число 64 у вигляді суми двох додатних доданків так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою.

26.41. Знайдіть додатне число, для якого різниця його потроєного квадрата і його куба є найбільшою.

Розділ 2
Стереометрія



ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ У ПРОСТОРІ §4

У цьому параграфі ви ознайомитеся з основними поняттями стереометрії, аксіомами стереометрії та наслідками з них. Отримаєте початкові уявлення про многогранники. Ви дізнаєтеся про взаємне розміщення двох прямих, прямої та площини, двох площин у просторі. Ознайомитеся з правилами, за якими зображають просторові фігури на площині.

27. Основні поняття стереометрії. Аксіоми стереометрії

Вивчаючи математику, ви з багатьма поняттями ознайомилися за допомогою означень. Так, із курсу планіметрії вам добре відомі означення чотирикутника, трапеції, кола тощо.

Означення будь-якого поняття основане на інших поняттях, зміст яких вам уже відомий. Наприклад, розглянемо означення трапеції: «Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні». Бачимо, що означення трапеції ґрунтується на таких уже введених поняттях, як чотирикутник, сторона чотирикутника, паралельні та непаралельні сторони тощо. Отже, означення вводять за принципом «нове основане на старому». Тоді зрозуміло, що мають існувати первинні поняття, яким означень не дають. Їх називають **основними поняттями** (рис. 27.1).

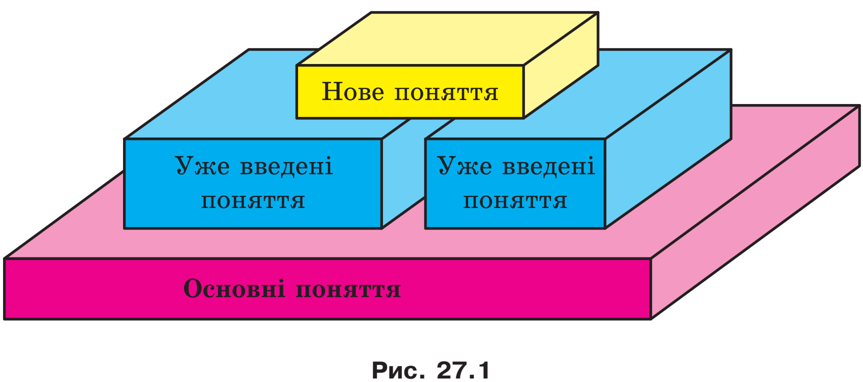


Рис. 27.1

У курсі планіметрії, який ви вивчили, означення не давали таким фігурам, як точка й пряма. У стереометрії, крім них, до основних понять віднесемо ще одну фігуру — **площину**.

Наочне уявлення про площину дають поверхня водойми в безвітряну погоду, поверхня дзеркала, поверхня полірованого стола, подумки продовжені в усіх напрямах.

Використовуючи поняття площини, можна вважати, що в планіметрії ми розглядали тільки одну площину, і всі фігури, які вивчалися, належали цій площині. У стереометрії ж розглядають безліч площин, розміщених у **просторі**.

Як правило, площини позначають малими грецькими літерами α, β, γ, ... На рисунках площини зображають у вигляді паралелограма (рис. 27.2) або інших обмежених частин площини (рис. 27.3).

Рис. 27.2

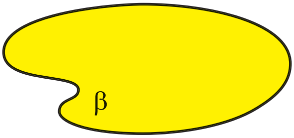


Рис. 27.3

Площина, так само як і пряма, складається з точок, тобто площина — це множина точок.

Існує кілька випадків взаємного розміщення точок, прямих і площин у просторі. Наведемо приклади.

На рисунку 27.4 зображено точку A, яка належить площині α. Також говорять, що *точка A лежить у площині* α або *площина* α *проходить через точку A*. Коротко це можна записати так: $A \in \alpha$.

На рисунку 27.5 зображено точку B, яка не належить площині β. Коротко це можна записати так: $B \notin \beta$.

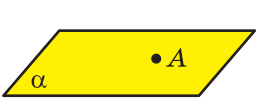


Рис. 27.4

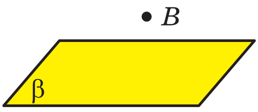


Рис. 27.5

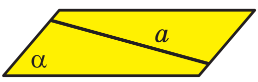


Рис. 27.6

На рисунку 27.6 зображено пряму a, яка належить площині α. Також говорять, що *пряма a лежить у площині* α або *площина* α *проходить через пряму a*. Коротко це можна записати так: $a \subset \alpha$.

Якщо пряма та площина мають тільки одну спільну точку, то говорять, що **пряма перетинає площину**. На рисунку 27.7 зображено пряму a, яка перетинає площину α в точці A. Записують: $a \cap \alpha = A$.

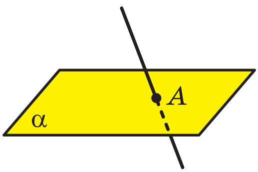


Рис. 27.7

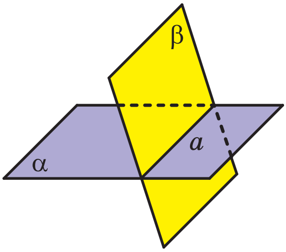


Рис. 27.8

Далі, говорячи «дві точки», «три прямі», «дві площини» тощо, матимемо на увазі, що це різні точки, різні прямі та різні площини.

Якщо дві площини мають спільну точку, то говорять, що ці площини **перетинаються**.

На рисунку 27.8 зображено площини α і β, які перетинаються по прямій a. Записують: $\alpha \cap \beta = a$.

На початковому етапі вивчення стереометрії неможливо доводити теореми, спираючись на інші твердження, оскільки цих тверджень ще немає. Через це перші властивості, які стосуються точок, прямих і площин у просторі, приймають без доведення та називають **аксіомами**.

Зазначимо, що деякі аксіоми стереометрії за формулюваннями дослівно збігаються з відомими вам аксіомами планіметрії. Наприклад:

- *якою б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй*;
- *через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.*

Ми не будемо ознайомлюватися зі строгою аксіоматичною побудовою стереометрії. Розглянемо лише деякі твердження, що виражають основні властивості площин простору, спираючись на які зазвичай будують курс стереометрії в школі.

Аксіома А1. У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії.

Якщо в будь-якій площині простору виконуються аксіоми планіметрії, то виконуються і наслідки із цих аксіом, тобто теореми планіметрії. Отже, у стереометрії можна користуватися всіма відомими нам властивостями плоских фігур.

Аксіома А2. Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна.

Рисунки 27.9–27.11 ілюструють цю аксіому.

Рис. 27.9

Рис. 27.10

Рис. 27.11

Із наведеної аксіоми випливає, що три точки простору, які не лежать на одній прямій, визначають єдину площину, що проходить через ці точки. Отже, для позначення площини можна вказати будь-які три її точки, що не лежать на одній прямій. Наприклад, на рисунку 27.12 зображено площину ABC.

Запис $M \in ABC$ означає, що точка M належить площині ABC. Запис $MN \subset ABC$ означає, що пряма MN належить площині ABC (рис. 27.12).

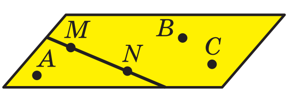


Рис. 27.12

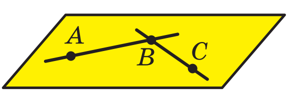


Рис. 27.13

Аксіома А3. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

Наприклад, на рисунку 27.13 точки A, B і C належать площині ABC. Тоді можна записати: $AB \subset ABC$, $BC \subset ABC$.

Із цієї аксіоми випливає, що коли пряма не належить площині, то вона має з даною площиною не більше ніж одну спільну точку.

Твердження, сформульоване в аксіомі **А3**, часто використовують на практиці, коли хочуть перевірити, чи є дана поверхня рівною (плоскою). Для цього до поверхні в різних місцях прикладають рівну рейку та перевіряють, чи є зазор між рейкою та поверхнею (рис. 27.14).

Аксіома А4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

Цю аксіому можна проілюструвати за допомогою зігнутого аркуша паперу або за допомогою вашого підручника (рис. 27.15).

Рис. 27.14

Рис. 27.15

Задача. Доведіть, що коли дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Розв'язання. Нехай точка A є спільною для двох площин α і β, тобто $A \in \alpha$ і $A \in \beta$ (рис. 27.16). За аксіомою **А4** площини α і β перетинаються по прямій. Нехай $\alpha \cap \beta = a$. Тоді всі спільні точки площин α і β належать прямій a. Точка A є спільною для площин α і β. Отже, $A \in a$. ◄

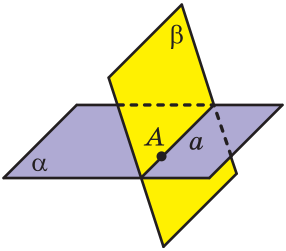


Рис. 27.16

Крім аксіом, існують інші властивості, які описують взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі. Спираючись на аксіоми, можна довести, наприклад, такі твердження (наслідки з аксіом стереометрії).

Теорема 27.1. ***Через пряму і точку, яка їй не належить, проходить площина, і до того ж тільки одна*** (рис. 27.17).

Теорема 27.2. ***Через дві прямі, які перетинаються, проходить площина, і до того ж тільки одна*** (рис. 27.18).

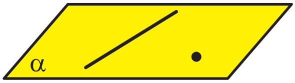


Рис. 27.17

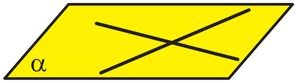


Рис. 27.18

З аксіоми **А2** і теорем 27.1 і 27.2 випливає, що *площина однозначно визначається*:

1) *трьома точками, що не лежать на одній прямій*;
2) *прямою і точкою, яка не належить цій прямій*;
3) *двома прямими, що перетинаються.*

Таким чином, ми вказали три способи задання площини.

?

1. Як у математиці називають первинні поняття, яким не дають означення?
2. Які фігури входять до списку основних понять стереометрії?
3. У якому разі говорять, що пряма перетинає площину?
4. У якому разі говорять, що площини перетинаються?
5. Сформулюйте аксіоми **А1**, **А2**, **А3**, **А4**.
6. Які наслідки з аксіом стереометрії ви знаєте?
7. Укажіть способи однозначного задання площини.

ВПРАВИ

27.1.° Зобразіть площину α, точку M, що їй належить, і точку K, що їй не належить. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

27.2.° Зобразіть площину γ, яка проходить через пряму a. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

27.3.° Зобразіть площину α і пряму b, яка перетинає дану площину в точці A. Запишіть це за допомогою відповідних символів. Скільки точок прямої b належить площині α?

27.4.° Зобразіть площини β і γ, які перетинаються по прямій c. Запишіть це за допомогою відповідних символів.

27.5.° Запишіть за допомогою символів взаємне розміщення точок, прямих і площини, зображених на рисунку 27.19.

27.6.• Скільки площин можна провести через дані пряму та точку?

27.7.• Дано точки A, B і C такі, що $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Скільки площин можна провести через точки A, B і C?

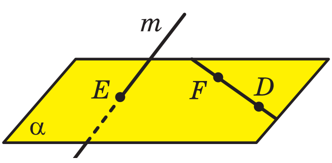


Рис. 27.19

27.8.$^{\bullet}$ Дано точки D, E і F такі, що $DE = 2$ см, $EF = 4$ см, $DF = 6$ см. Скільки площин можна провести через точки D, E і F?

27.9.$^{\bullet\bullet}$ Прямі AB і AC перетинають площину α в точках B і C, точки D і E належать цій площині (рис. 27.20). Побудуйте точку перетину прямої DE з площиною ABC.

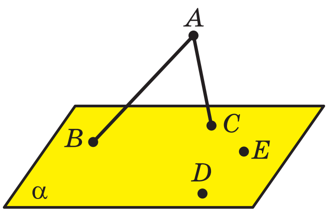


Рис. 27.20

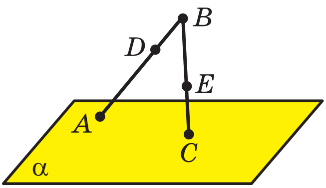


Рис. 27.21

27.10.$^{\bullet\bullet}$ Пряма BA перетинає площину α в точці A, пряма BC — у точці C (рис. 27.21). На відрізку AB позначили точку D, на відрізку BC — точку E. Побудуйте точку перетину прямої DE з площиною α.

27.11.$^{\bullet\bullet}$ Пряма m — лінія перетину площин α і β (рис. 27.22). Точки A і B належать площині α, а точка C — площині β. Побудуйте лінії перетину площини ABC із площиною α і з площиною β.

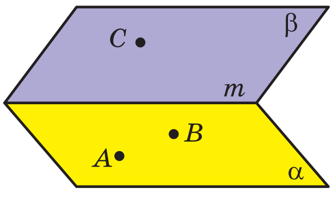


Рис. 27.22

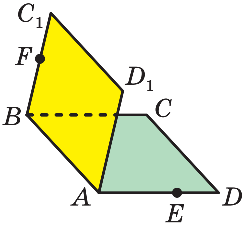


Рис. 27.23

27.12.$^{\bullet\bullet}$ Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 не лежать в одній площині (рис. 27.23). На відрізку AD позначили точку E, а на відрізку BC_1 — точку F. Побудуйте точку перетину:

1) прямої CE з площиною ABC_1;

2) прямої FD_1 із площиною ABC.

27.13.$^{\bullet\bullet}$ Як за допомогою двох ниток столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині?

27.14.$^{\bullet\bullet}$ Точка M — спільна точка двох площин ABC і BCD. Знайдіть відрізок BC, якщо $BM = 4$ см, $MC = 7$ см.

27.15.•• Точка K — спільна точка двох площин MNF і MNE. Знайдіть відрізок MN, якщо $MK = KN = 5$ см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

27.16. На висоті BD рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) позначили точку M. Знайдіть відношення площі трикутника AMC до площі трикутника ABC, якщо $BD = 12$ см, $BM = 8$ см.

28. Просторові фігури. Початкові відомості про многогранники

У стереометрії, крім точок, прямих і площин, розглядають просторові фігури, тобто фігури, не всі точки яких лежать в одній площині. З деякими з просторових фігур ви вже ознайомилися. Так, на рисунку 28.1 зображено циліндр, конус і кулю. Ці фігури ви докладно вивчатимете в 11 класі.

Рис. 28.1

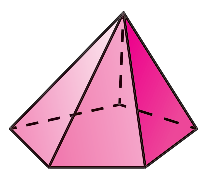


Рис. 28.2

На рисунку 28.2 зображено ще одну відому вам просторову фігуру — піраміду. Ця фігура є окремим видом **многогранника**.

Приклади многогранників показано на рисунку 28.3.

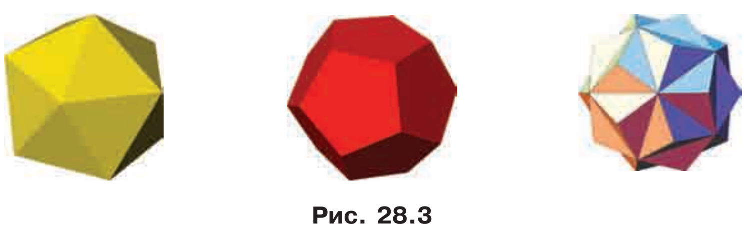


Рис. 28.3

Поверхня многогранника складається з многокутників. Їх називають **гранями многогранника**. Сторони многокутників називають **ребрами многогранника**, а вершини — **вершинами многогранника** (рис. 28.4).

На рисунку 28.5 зображено п'ятикутну піраміду $FABCDE$. Поверхня цього многогранника складається з п'яти трикутників, які називають **бічними гранями піраміди**, та одного п'ятикутника, який називають **основою піраміди**. Вершину F, яка є спільною для всіх бічних граней, називають **вершиною піраміди**. Ребра FA, FB, FC, FD і FE називають **бічними ребрами піраміди**, а ребра AB, BC, CD, DE і EA — **ребрами основи піраміди**.

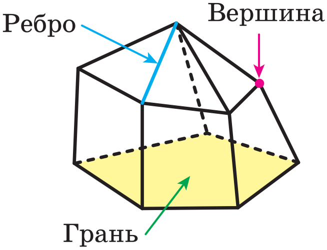


Рис. 28.4

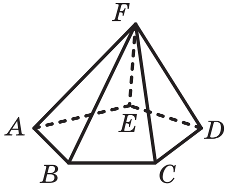


Рис. 28.5

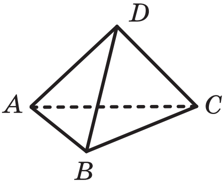


Рис. 28.6

На рисунку 28.6 зображено трикутну піраміду $DABC$. Трикутну піраміду називають також **тетраедром**.

Ще одним окремим видом многогранника є **призма**. На рисунку 28.7 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Цей многогранник має п'ять граней, дві з яких — рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Їх називають **основами призми**. Решта граней призми — паралелограми. Їх називають **бічними гранями призми**. Ребра AA_1, BB_1 і CC_1 називають **бічними ребрами призми**.

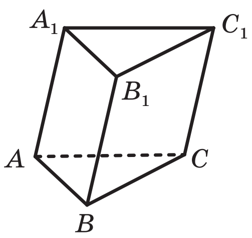


Рис. 28.7

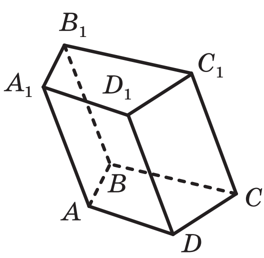


Рис. 28.8

На рисунку 28.8 зображено чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Її поверхня складається з двох рівних чотирикутників $ABCD$

і $A_1B_1C_1D_1$ (основи призми) та чотирьох паралелограмів (бічні грані призми).

Ви знайомі також з окремим видом чотирикутної призми — **прямокутним паралелепіпедом.** На рисунку 28.9 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Усі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками.

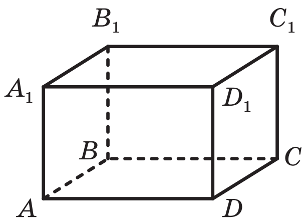


Рис. 28.9

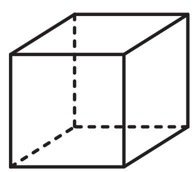


Рис. 28.10

У свою чергу, окремим видом прямокутного паралелепіпеда є **куб.** Усі грані куба — рівні квадрати (рис. 28.10).

Чотирикутну призму, основою якої є паралелограм, називають **паралелепіпедом.**

У курсі геометрії 11 класу ви докладніше ознайомитеся з многогранниками та їхніми окремими видами.

Задача. На ребрах AA_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM \neq DN$ (рис. 28.11). Побудуйте точку перетину прямої MN із площиною ABC.

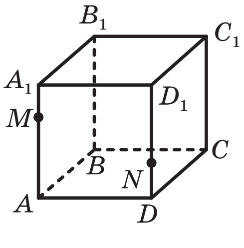


Рис. 28.11

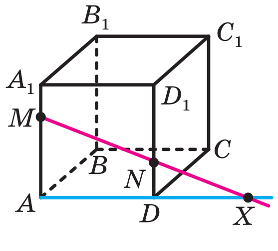


Рис. 28.12

Розв'язання. Точки M і N належать площині AA_1D_1. Тоді за аксіомою **А3** пряма MN належить цій площині. Аналогічно пряма AD також належить площині AA_1D_1. Із планіметрії відомо, що прямі, які лежать в одній площині, або є паралельними, або перетинаються. Оскільки $AM \neq DN$, то прямі AD і MN перетинаються. Нехай X — точка їхнього перетину (рис. 28.12).

Точки A і D належать площині ABC. Тоді за аксіомою **А3** пряма AD належить цій самій площині. Точка X належить прямій AD. Отже, точка X належить площині ABC. Оскільки точка X також належить прямій MN, то пряма MN перетинає площину ABC у точці X. ◄

1. Назвіть відомі вам просторові фігури.

2. З яких фігур складається поверхня многогранника? Як їх називають?

3. Що називають ребрами многогранника? вершинами многогранника?

4. Які види многогранників ви знаєте? Опишіть ці многогранники.

ВПРАВИ

28.1.° На рисунку 28.13 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть:
1) основи паралелепіпеда;
2) бічні грані паралелепіпеда;
3) бічні ребра паралелепіпеда;
4) ребра нижньої основи паралелепіпеда.

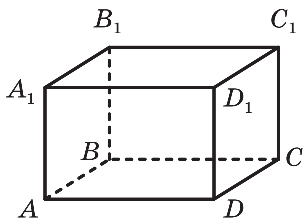


Рис. 28.13

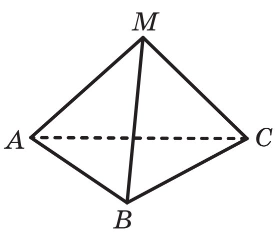


Рис. 28.14

28.2.° На рисунку 28.14 зображено піраміду $MABC$. Укажіть:
1) основу піраміди;
2) вершину піраміди;
3) бічні грані піраміди;
4) бічні ребра піраміди;
5) ребра основи піраміди.

28.3.• На ребрі BC тетраедра $SABC$ позначили точку D. Яка пряма є лінією перетину площин: 1) ASD і ABC; 2) ASD і BSC; 3) ASD і ASC?

28.4.• Точка M належить грані ASC тетраедра $SABC$, точка D — ребру BC (рис. 28.15). Побудуйте лінію перетину площини ABC та площини, яка проходить через пряму SD і точку M.

28.5.• На бічних ребрах SA і SB піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC, якщо прямі MK і AB не є паралельними.

28.6.• На бічних ребрах SA і SC піраміди $SABCD$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC, якщо прямі MK і AC не є паралельними.

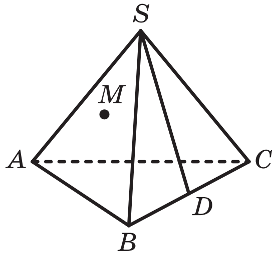


Рис. 28.15

28.7.• Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте прямі, по яких площина, що проходить через точки A, C і B_1, перетинає грані куба.

28.8.• Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ і площину, що проходить через прямі AC_1 і AB. Побудуйте прямі, по яких ця площина перетинає грані призми.

28.9.•• Точка M належить грані ASB тетраедра $SABC$, точка K — грані BSC (рис. 28.16). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC.

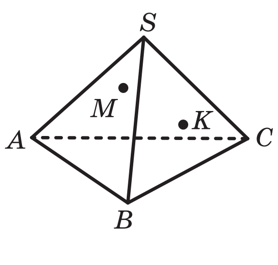


Рис. 28.16

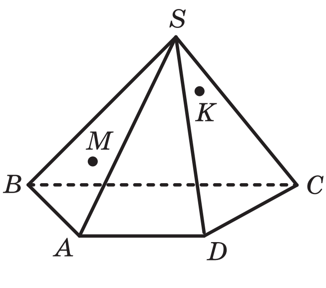


Рис. 28.17

28.10.•• Точка M належить грані ASB піраміди $SABCD$, точка K — грані CSD (рис. 28.17). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABC.

28.11.$^{\bullet\bullet}$ Дано піраміду $SABCD$ (рис. 28.18). Побудуйте лінію перетину площин ASB і CSD.

28.12.$^{\bullet\bullet}$ Дано піраміду $SABCDE$ (рис. 28.19). Побудуйте лінію перетину площин ASE і BSC.

28.13.$^{\bullet\bullet}$ На ребрах AB і CD тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E і F. Побудуйте лінію перетину площин AFB і CED.

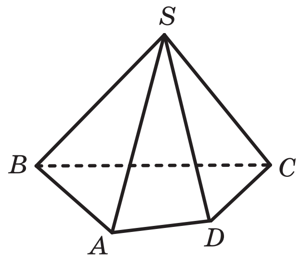


Рис. 28.18

28.14.$^{\bullet\bullet}$ Дано піраміду $MABCD$, точка K належить відрізку BD (рис. 28.20). Побудуйте лінію перетину площин MCK і MAB.

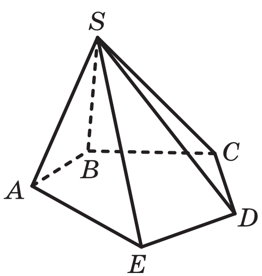


Рис. 28.19

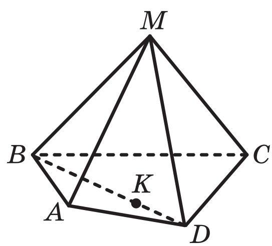


Рис. 28.20

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

28.15. Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.

29. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Із курсу планіметрії ви знаєте, що дві прямі називають такими, що перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку. Таке саме означення прямих, що перетинаються, дають і в стереометрії.

Вам відомо також, що дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються. Чи можна це означення перенести в стереометрію?

Звернемося до рисунка 29.1, на якому зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Жодна з прямих AB і AA_1 не має з прямою DC спільних точок. При цьому прямі AB і DC лежать в одній площині — у площині ABC, а прямі AA_1 і DC не лежать в одній площині, тобто не існує площини, яка проходила б через ці прямі.

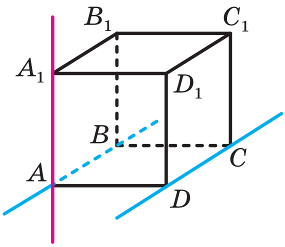


Рис. 29.1

Наведений приклад показує, що в стереометрії для двох прямих, які не мають спільних точок, можливі два випадки взаємного розміщення: прямі лежать в одній площині та прямі не лежать в одній площині. Для кожного із цих випадків уведемо відповідне означення.

Означення. Дві прямі в просторі називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині та не перетинаються.

Якщо прямі a і b паралельні, то записують: $a \parallel b$.

Означення. Дві прямі в просторі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині.

Наприклад, на рисунку 29.1 прямі AB і DC — паралельні, а прямі AA_1 і DC — мимобіжні.

Міжнародний центр культури і мистецтв, м. Київ

Корабельний ліс

Зруб

Рис. 29.2

Наочне уявлення про паралельні прямі дають колони будівлі, корабельний ліс, колоди зрубу (рис. 29.2).

Рис. 29.3

Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дроти ліній електропередачі, різні елементи будівельних конструкцій (рис. 29.3).

Отже, існують три можливих випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі (рис. 29.4):

1) прямі перетинаються;
2) прямі паралельні;
3) прямі мимобіжні.

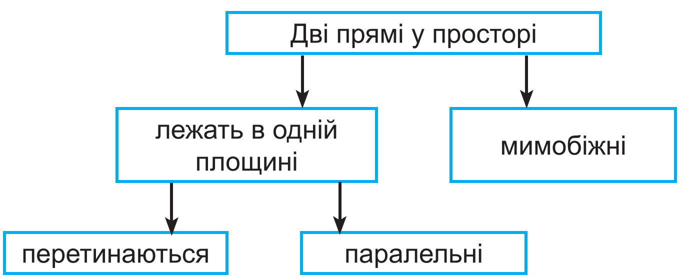


Рис. 29.4

Два відрізки називають **паралельними (мимобіжними)**, якщо вони лежать на паралельних (мимобіжних) прямих.

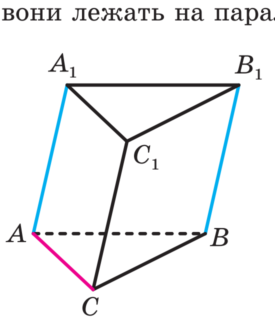


Рис. 29.5

Наприклад, ребра AA_1 і BB_1 трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 29.5) є паралельними, а ребра AC і BB_1 — мимобіжними.

Теорема 29.1. ***Через дві паралельні прямі проходить площина, і до того ж тільки одна.***

Доведення. Нехай дано паралельні прямі a і b. Доведемо, що існує єдина площина α така, що $a \subset \alpha$ і $b \subset \alpha$.

Існування площини α, яка проходить через прямі a і b, випливає з означення паралельних прямих.

Якщо припустити, що існує ще одна площина, яка проходить через прямі a і b, то через пряму a та деяку точку прямої b проходитимуть дві різні площини, що суперечить теоремі 27.1. ◀

У п. 27 було вказано три способи задання площини. Теорему 29.1 можна розглядати як ще один спосіб задання площини — за допомогою двох паралельних прямих.

Установити паралельність двох прямих, які лежать в одній площині, можна за допомогою відомих вам з курсу планіметрії ознак паралельності двох прямих. А як установити, чи є дві прямі мимобіжними? Відповісти на це запитання дає змогу така теорема.

Теорема 29.2 (ознака мимобіжних прямих). ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі є мимобіжними*** (рис. 29.6).

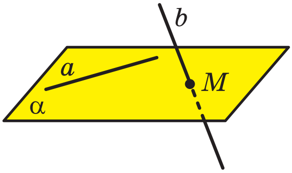


Рис. 29.6

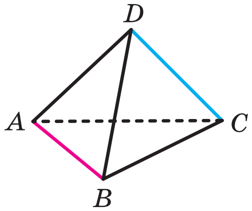


Рис. 29.7

На рисунку 29.7 ребра AB і DC тетраедра $DABC$ є мимобіжними. Справді, пряма DC перетинає площину ABC у точці C, яка не належить прямій AB. Отже, за ознакою мимобіжних прямих прямі AB і DC є мимобіжними.

1. Які дві прямі в просторі називають паралельними? мимобіжними?

2. Які існують випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі?

3. Які два відрізки називають паралельними? мимобіжними?

4. Сформулюйте теорему про площину, яку задають дві паралельні прямі.

5. Сформулюйте ознаку мимобіжних прямих.

ВПРАВИ

29.1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 29.8). Назвіть його ребра: 1) паралельні ребру CD; 2) мимобіжні з ребром CD.

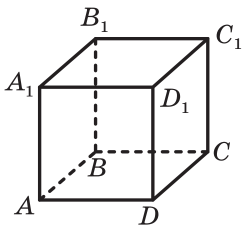


Рис. 29.8

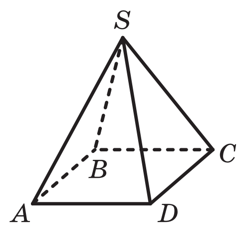


Рис. 29.9

29.2.° Укажіть моделі мимобіжних прямих, використовуючи предмети класної кімнати.

29.3.° Дано піраміду $SABCD$ (рис. 29.9). Назвіть ребра піраміди, мимобіжні з ребром SA.

29.4.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 29.10). Укажіть взаємне розміщення прямих:

1) BC і A_1C;
2) AB і C_1D_1;
3) BD і CC_1;
4) AB_1 і DC_1;
5) DC_1 і BB_1;
6) AA_1 і CC_1.

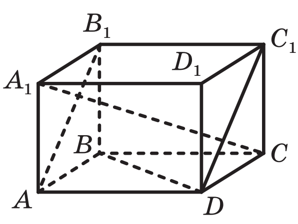


Рис. 29.10

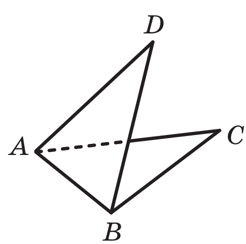


Рис. 29.11

29.5.° Чи є правильним твердження:

1) дві прямі, які не є паралельними, мають спільну точку;
2) дві прямі, які не є мимобіжними, лежать в одній площині;
3) дві прямі є мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні?

29.6.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 29.8). Доведіть, що прямі AA_1 і BC мимобіжні.

29.7.° Трикутники ABC і ADB лежать у різних площинах (рис. 29.11). Яким є взаємне розміщення прямих AD і BC? Відповідь обґрунтуйте.

29.8.• Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c, якщо:
1) прямі a і b перетинаються, а прямі a і c паралельні;
2) прямі a і b паралельні, а прямі a і c мимобіжні?

29.9.• Скільки площин можуть задавати три попарно паралельні прямі? Зробіть рисунок.

29.10.• Кінець A відрізка AB належить площині α. Через точку B і точку C, що належить відрізку AB, проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 відповідно.
1) Знайдіть відрізок BB_1, якщо точка C — середина відрізка AB і $CC_1 = 5$ см.
2) Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AC : BC = 3 : 4$ і $BB_1 = 28$ см.

29.11.• Кінець C відрізка CD належить площині β. На відрізку CD позначили точку E так, що $CE = 6$ см, $DE = 9$ см. Через точки D і E провели паралельні прямі, які перетинають площину β у точках D_1 і E_1 відповідно. Знайдіть відрізок DD_1, якщо $EE_1 = 12$ см.

29.12.•• На відрізку AB, який не перетинає площину α, позначили точку C так, що $AC = 4$ см, $BC = 8$ см. Через точки A, B і C провели паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок A_1C_1, якщо $B_1C_1 = 10$ см.

29.13.•• Точка C — середина відрізка AB, який не перетинає площину β. Через точки A, B і C проведено паралельні прямі, які перетинають площину β у точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок AA_1, якщо $BB_1 = 18$ см, $CC_1 = 15$ см.

29.14.* Через кінці відрізка AB, що перетинає площину α, і його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно (рис. 29.12). Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 8$ см.

29.15.* Трикутник ABC не має спільних точок із площиною α. Відрізок BM — медіана трикутника ABC, точка O — середина відрізка BM. Через точки A, B, C, M і O проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1, M_1 і O_1 відповідно. Знайдіть відрізок BB_1, якщо $AA_1 = 17$ см, $CC_1 = 13$ см, $OO_1 = 12$ см.

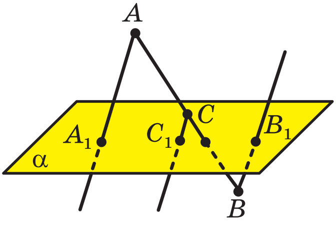


Рис. 29.12

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

29.16. Точка E — середина медіани BM трикутника ABC. Пряма AE перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть відношення, у якому точка K ділить відрізок BC, рахуючи від вершини B.

30. Паралельність прямої та площини

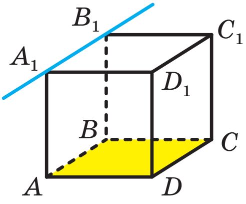


Рис. 30.1

Вам уже відомі два можливих випадки взаємного розміщення прямої та площини:

1) пряма належить площині, тобто всі точки прямої належать площині;
2) пряма перетинає площину, тобто пряма має з площиною тільки одну спільну точку.

Зрозуміло, що можливий і третій випадок, коли пряма та площина не мають спільних точок. Наприклад, пряма, яка містить ребро A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, не має спільних точок із площиною ABC (рис. 30.1).

Означення. Пряму та площину називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо пряма a та площина α паралельні, то записують: $a \parallel \alpha$. Також прийнято говорити, що пряма a паралельна площині α, а площина α паралельна прямій a.

Наочне уявлення про пряму, паралельну площині, дає деяке спортивне знаряддя, наприклад бруси, паралельні площині підлоги (рис. 30.2). Інший приклад — водостічна труба: вона паралельна площині стіни (рис. 30.3).

Рис. 30.2

Рис. 30.3

З'ясовувати, чи є дані пряма та площина паралельними, за допомогою означення складно. Набагато ефективніше користуватися такою теоремою.

Теорема 30.1 (ознака паралельності прямої та площини). ***Якщо пряма, яка не належить даній площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то дана пряма паралельна самій площині.***

Наприклад, на рисунку 30.1 прямі A_1B_1 і AB містять протилежні сторони квадрата ABB_1A_1. Ці прямі паралельні. Оскільки $AB \subset ABC$, то за ознакою паралельності прямої та площини $A_1B_1 \parallel ABC$.

Відрізок називають **паралельним площині**, якщо він належить прямій, паралельній цій площині. Наприклад, ребро AB куба паралельне площині CDD_1 (рис. 30.1).

Ви вмієте встановлювати паралельність двох прямих за допомогою теорем-ознак, відомих із планіметрії. Розглянемо теореми, які описують достатні умови паралельності двох прямих у просторі.

Теорема 30.2. ***Якщо площина проходить через дану пряму, паралельну другій площині, та перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.***

На рисунку 30.4 пряма a паралельна площині α. Площина β проходить через пряму a і перетинає площину α по прямій b. Тоді $b \parallel a$.

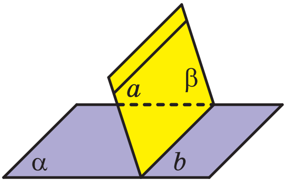


Рис. 30.4

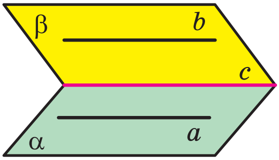


Рис. 30.5

Теорема 30.3. ***Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються по прямій, відмінній від двох даних, то пряма перетину площин паралельна кожній із двох даних прямих.***

На рисунку 30.5 прямі a і b паралельні, площина α проходить через пряму a, а площина β — через пряму b, $\alpha \cap \beta = c$. Тоді $c \parallel a$ і $c \parallel b$.

Теорема 30.4. ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

Задача. Доведіть, що коли пряма паралельна кожній із двох площин, які перетинаються, то вона паралельна прямій їхнього перетину.

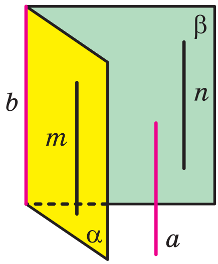


Рис. 30.6

Розв'язання. Нехай дано пряму a та площини α і β такі, що $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = b$ (рис. 30.6). Доведемо, що $a \parallel b$.

У площинах α і β знайдуться відповідно такі прямі m і n, що $m \parallel a$ і $n \parallel a$. Якщо хоча б одна з прямих m і n збігається з прямою b, то твердження задачі доведено. Якщо ж кожна з прямих m і n відмінна від прямої b, то за теоремою 30.4 отримуємо, що $m \parallel n$.

Скориставшись теоремою 30.3, доходимо висновку, що $b \parallel n$. Але $n \parallel a$, отже, $a \parallel b$. ◄

1. У якому разі пряму та площину називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності прямої та площини.
3. Який відрізок називають паралельним площині?
4. Сформулюйте теореми, які описують достатні умови паралельності двох прямих у просторі.

ВПРАВИ

30.1.° Укажіть серед предметів, що вас оточують, моделі площини та прямої, яка їй паралельна.

30.2.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 30.7). Площинам яких граней куба паралельне ребро: 1) AD; 2) C_1D_1; 3) BB_1?

30.3.° Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 30.8), точки E і F — середини ребер CC_1 і DD_1 відповідно. Запишіть грані паралелепіпеда, яким паралельна пряма: 1) AB; 2) CC_1; 3) AC; 4) EF.

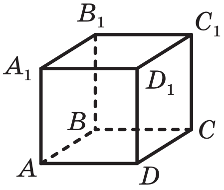


Рис. 30.7

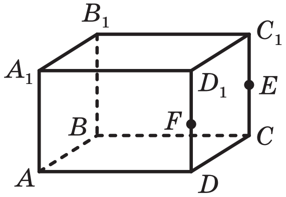


Рис. 30.8

30.4.° Пряма a паралельна площині α. Чи є правильним твердження, що пряма a паралельна будь-якій прямій, що лежить у площині α?

30.5.° Дано прямі a і b та площину α. Чи є правильним твердження:
1) якщо $a \parallel \alpha$ і $b \parallel \alpha$, то $a \parallel b$;
2) якщо $a \parallel b$ і $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$?

30.6.° Пряма a та площина α паралельні прямій b. Яким може бути взаємне розміщення прямої a та площини α?

30.7.° Прямі a і b перетинаються, а площина α паралельна прямій a. Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α?

30.8.• Точки M і K — середини відповідно сторін AB і BC трикутника ABC. Точка D не належить площині ABC. Доведіть, що $MK \parallel ADC$.

30.9.• Точки E і F — середини відповідно бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$. Пряма EF лежить у площині α, відмінній від площини трапеції. Доведіть, що прямі AD і BC паралельні площині α.

30.10.• Відрізки BC і AD — основи трапеції $ABCD$. Трикутник BMC і трапеція $ABCD$ не лежать в одній площині (рис. 30.9). Точка E — середина відрізка BM, точка F — середина відрізка CM. Доведіть, що $EF \parallel AD$.

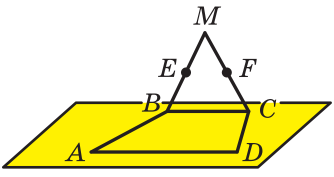


Рис. 30.9

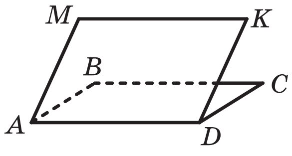


Рис. 30.10

30.11.• Паралелограми $ABCD$ і $AMKD$ не лежать в одній площині (рис. 30.10). Доведіть, що чотирикутник $BMKC$ — паралелограм.

30.12.• Площина α, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC у точках A_1 і C_1 відповідно (рис. 30.11). Знайдіть відрізок A_1C_1, якщо $AC = 18$ см і $AA_1 : A_1B = 7 : 5$.

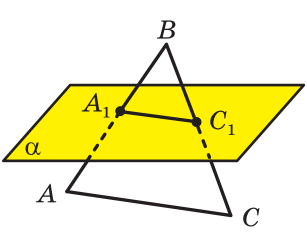


Рис. 30.11

30.13.• Площина α, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає сторони AC і BC у точках E і F відповідно. Знайдіть відношення $AE : EC$, якщо $CF : CB = 3 : 11$.

30.14.•• Вершини A і C трикутника ABC належать площині α, а вершина B не належить цій площині. На сторонах AB і BC позначено відповідно точки E і F так, що $BA : BE = BC : BF$. Доведіть, що пряма EF паралельна площині α.

30.15.•• Точка M — середина сторони AB трикутника ABC. Площина α проходить через точку M паралельно прямій AC і перетинає сторону BC у точці K. Доведіть, що точка K — середина сторони BC. Знайдіть площу чотирикутника $AMKC$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 28 см^2.

30.16.•• На ребрі CC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку M (рис. 30.12). Побудуйте лінію перетину площин: 1) ADM і BB_1C_1; 2) AA_1M і DCC_1.

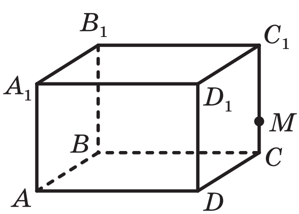


Рис. 30.12

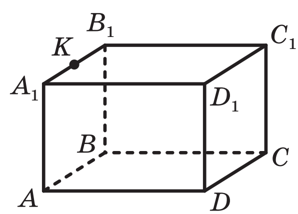


Рис. 30.13

30.17.•• На ребрі A_1B_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначили точку K (рис. 30.13). Побудуйте лінію перетину площин: 1) CC_1K і ABB_1; 2) CDK і ABB_1.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

30.18. Бічні сторони прямокутної трапеції відносяться як 3 : 5, а різниця основ дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша діагональ дорівнює 13 см.

31. Паралельність площин

Розглянемо варіанти можливого взаємного розміщення двох площин.

Ви знаєте, що дві площини можуть мати спільні точки, тобто перетинатися. Зрозуміло, що дві площини можуть і не мати спільних точок. Наприклад, площини ABC і $A_1B_1C_1$, які містять основи призми, не мають спільних точок (рис. 31.1).

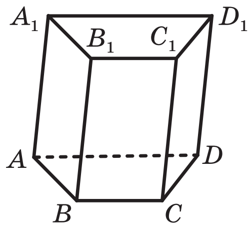


Рис. 31.1

Означення. Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Якщо площини α і β паралельні, то записують: $\alpha \parallel \beta$. Також прийнято говорити, що площина α паралельна площині β або площина β паралельна площині α.

Наочне уявлення про паралельні площини дають стеля та підлога кімнати; поверхня води, налитої в акваріум, і його дно (рис. 31.2).

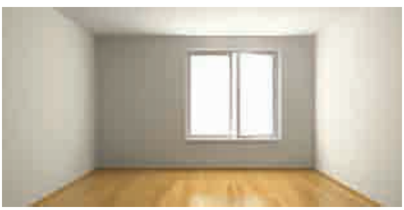


Рис. 31.2

З означення паралельних площин випливає, що *будь-яка пряма, яка лежить в одній із двох паралельних площин, паралельна другій площині*.

У тих випадках, коли треба з'ясувати, чи є дві площини паралельними, зручно користуватися такою теоремою.

Теорема 31.1 (ознака паралельності двох площин). ***Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні відповідно двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.***

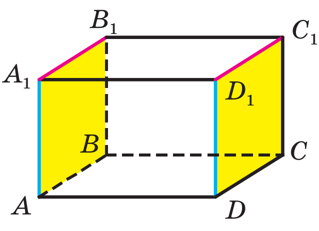


Рис. 31.3

Наприклад, на рисунку 31.3 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Маємо: $AA_1 \parallel DD_1$ і $A_1B_1 \parallel D_1C_1$. Тоді за ознакою паралельності двох площин $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$.

Будемо говорити, що **два многокутники паралельні**, якщо вони лежать у паралельних площинах. Наприклад, грані AA_1B_1B і DD_1C_1C прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельні (рис. 31.3).

Розглянемо деякі властивості паралельних площин.

Теорема 31.2. ***Через точку в просторі, яка не належить даній площині, проходить площина, паралельна даній площині, і до того ж тільки одна*** (рис. 31.4).

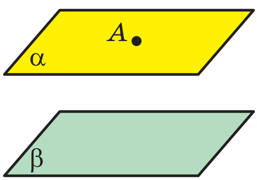


Рис. 31.4

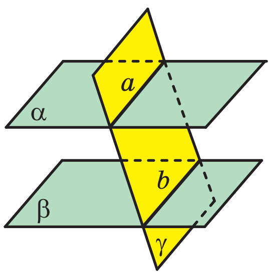


Рис. 31.5

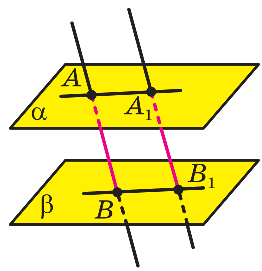


Рис. 31.6

Теорема 31.3. ***Прямі перетину двох паралельних площин третьою площиною паралельні*** (рис. 31.5).

Задача. Доведіть, що відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні.

Розв'язання. Нехай дано паралельні площини α і β та паралельні прямі AB і A_1B_1 такі, що $A \in \alpha$, $A_1 \in \alpha$, $B \in \beta$, $B_1 \in \beta$ (рис. 31.6). Доведемо, що $AB = A_1B_1$.

Паралельні прямі AB і A_1B_1 задають деяку площину γ, причому $\alpha \cap \gamma = AA_1$ і $\beta \cap \gamma = BB_1$.

За теоремою 31.3 отримуємо, що $AA_1 \parallel BB_1$. Отже, чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм. Звідси $AB = A_1B_1$. ◄

1. Які площини називають паралельними?
2. Сформулюйте ознаку паралельності двох площин.
3. У якому разі говорять, що два многокутники паралельні?
4. Сформулюйте властивості паралельних площин.

ВПРАВИ

31.1.° Чи є правильним твердження:
1) якщо дві площини паралельні, то будь-яка пряма однієї площини паралельна будь-якій прямій другої площини;
2) якщо пряма, яка лежить в одній площині, паралельна прямій, що лежить у другій площині, то дані площини паралельні?

31.2.° Паралелограми $ABCD$ і $AEFD$ не лежать в одній площині (рис. 31.7). Доведіть, що площини ABE і DCF паралельні.

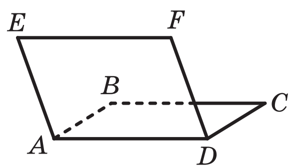


Рис. 31.7

31.3.° Чи можна стверджувати, що площина α паралельна площині трапеції, якщо площина α паралельна:
1) основам трапеції;
2) бічним сторонам трапеції?

31.4.° Чи є правильним твердження: якщо прямі перетину двох площин третьою площиною паралельні, то дані площини паралельні?

31.5.° Площини α і β паралельні. У площині α вибрано точки C і D, а в площині β — точки C_1 і D_1 такі, що прямі CC_1 і DD_1 паралельні. Знайдіть відрізки DD_1 і C_1D_1, якщо $CD = 12$ см, $CC_1 = 4$ см.

31.6.° Трикутник ABC лежить у площині α. Через його вершини проведено паралельні прямі, які перетинають площину β, паралельну площині α, у точках A_1, B_1 і C_1. Знайдіть периметр трикутника $A_1B_1C_1$, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 20 см.

31.7.• Точки M, N і K — середини ребер AB, AC і AD тетраедра $DABC$. Доведіть, що площини MNK і BCD паралельні.

31.8.• На ребрах DA, DB і DC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E, F і K так, що $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DB} = \frac{DK}{DC}$. Доведіть, що площини EFK і ABC паралельні.

31.9.• Дано паралельні площини α і β. Відрізок AB і точка C лежать у площині α, точка D — у площині β (рис. 31.8). Побудуйте лінію перетину: 1) площини β і площини ABD; 2) площини β і площини BCD.

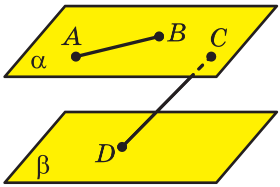


Рис. 31.8

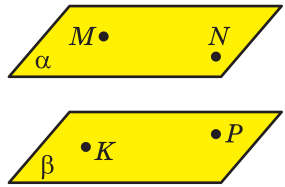


Рис. 31.9

31.10.• Дано паралельні площини α і β. Точки M і N лежать у площині α, точки K і P — у площині β (рис. 31.9). Побудуйте лінію перетину:

1) площини α і площини MKP;
2) площини β і площини MNK.

31.11.•• Паралельні площини α і β перетинають сторону BA кута ABC у точках A_1 і A_2 відповідно, а сторону BC — у точках C_1 і C_2 відповідно. Знайдіть:

1) відрізок A_1C_1, якщо $A_2C_2 = 36$ см, $BA_1 : BA_2 = 5 : 9$;
2) відрізок C_1C_2, якщо $A_1C_1 = 14$ см, $A_2C_2 = 21$ см, $BC_1 = 12$ см.

31.12.•• Площини α і β паралельні. Точки A і B лежать у площині α, точки C і D — у площині β. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O.

1) Доведіть, що $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{BO}{OD}$.
2) Знайдіть відрізок AB, якщо $CD = 32$ см, $AC : AO = 7 : 3$.

31.13.•• Точка M належить ребру A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин BDD_1 і CC_1M.

31.14.•• Точка E належить ребру B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте лінію перетину площин ACC_1 і BED.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

31.15. Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O. На відрізку OC позначили точку M так, що $CM : MO = 1 : 2$. Знайдіть $\operatorname{tg} \angle BMO$.

32. Паралельне проектування

Чимало явищ і процесів, з якими ми стикаємося в повсякденному житті, слугують прикладами перетворень, при яких образом просторової фігури є плоска фігура. Побачити одне з таких явищ можна в сонячну погоду, коли предмет відкидає тінь на плоску поверхню (рис. 32.1). Цей приклад ілюструє **перетворення фігури**, яке називають **паралельним проектуванням**. За допомогою цього перетворення на площині створюють зображення просторових фігур.

Рис. 32.1

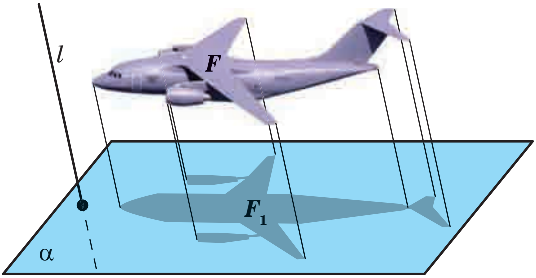


Рис. 32.2

Багато рисунків вашого підручника, на яких зображено просторові фігури, можна розглядати як тіні, що відкидають на площину сторінки предмети, освітлені паралельними променями.

Ознайомимося докладніше з паралельним проектуванням.

Нехай дано площину α, пряму l, що перетинає цю площину, і фігуру F (рис. 32.2). Через кожну точку фігури F проведемо пряму, паралельну прямій l (якщо точка фігури F належить прямій l, то розглядатимемо саму пряму l). Точки перетину всіх проведених прямих із площиною α утворюють деяку фігуру F_1. Описане перетворення фігури F називають паралельним проектуванням. Фігуру F_1 називають **паралельною проекцією фігури F на площину** α **в напрямі прямої l.** Фігуру F_1 називають також **зображенням фігури F на площині** α **в напрямі прямої l.**

Вибираючи вигідні положення площини α та прямої l, можна отримати наочне зображення даної фігури F. Це пов'язано з тим, що паралельне проектування має низку чудових властивостей (див. теореми 32.1–32.3). Завдяки цим властивостям зображення фігури схоже на саму фігуру.

Нехай дано площину α і пряму l, що перетинає цю площину.

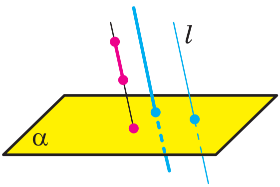


Рис. 32.3

Якщо пряма паралельна прямій l, то її проекцією на площину α є точка (рис. 32.3). Проекцією прямої l також є точка.

Якщо відрізок паралельний прямій l або лежить на прямій l, то його проекцією на площину α є точка (рис. 32.3).

У наведених нижче теоремах розглядатимемо прямі та відрізки, які не паралельні прямій l і не лежать на ній.

Теорема 32.1. ***Паралельною проекцією прямої є пряма; паралельною проекцією відрізка є відрізок*** (рис. 32.4).

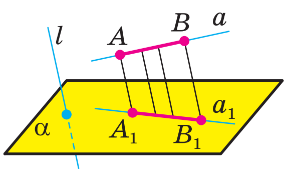


Рис. 32.4

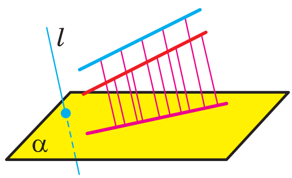


Рис. 32.5

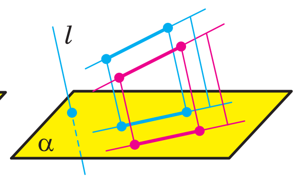


Рис. 32.6

Теорема 32.2. ***Паралельною проекцією двох паралельних прямих є або пряма*** (рис. 32.5), ***або дві паралельні прямі*** (рис. 32.6). ***Паралельні проекції двох паралельних відрізків лежать на одній прямій або на паралельних прямих*** (рис. 32.6).

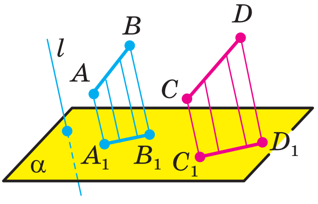
Теорема 32.3. ***Відношення паралельних проекцій відрізків, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, дорівнює відношенню самих відрізків*** (рис. 32.7).

Розглянемо зображення деяких многокутників на площині α в напрямі прямої l.

Якщо пряма l паралельна площині многокутника або належить цій площині, то зображенням многокутника є відрізок.

Тепер розглянемо випадок, коли пряма l перетинає площину многокутника.

Із властивостей паралельного проектування випливає, що паралельною проекцією трикутника є трикутник (рис. 32.8).



$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}$$

Рис. 32.7

Оскільки при паралельному проектуванні зберігається паралельність відрізків, то зображенням паралелограма (зокрема, прямокутника, ромба, квадрата) є паралелограм (рис. 32.9).

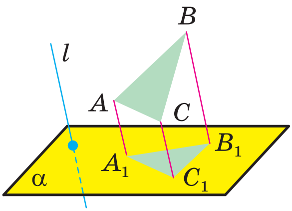


Рис. 32.8

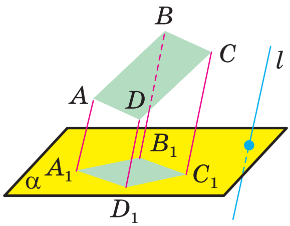


Рис. 32.9

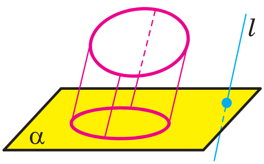


Рис. 32.10

Також із властивостей паралельного проектування випливає, що зображенням трапеції є трапеція.

Паралельною проекцією кола є фігура, яку називають **еліпсом** (рис. 32.10).

Зображення об'єктів за допомогою паралельного проектування широко використовують у найрізноманітніших галузях промисловості, наприклад в автомобілебудуванні (рис. 32.11).

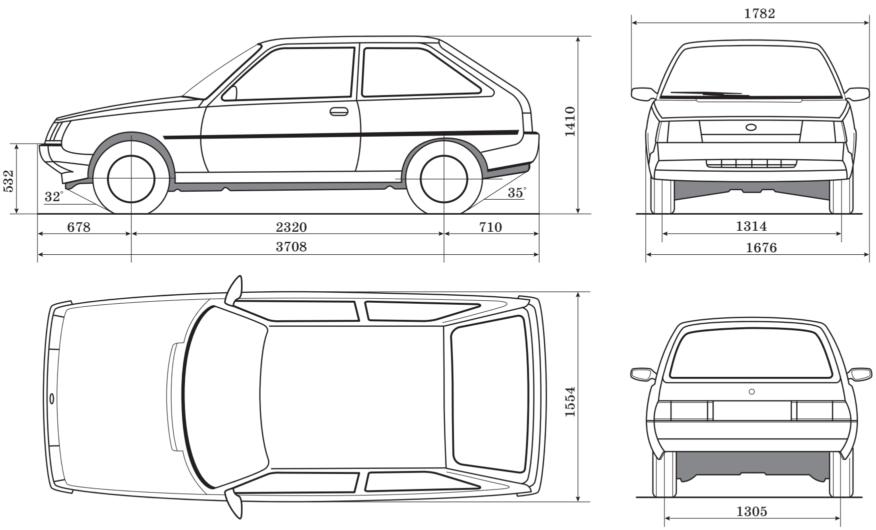


Рис. 32.11

1. Опишіть перетворення фігури, яке називають паралельним проектуванням.

2. Сформулюйте властивості паралельного проектування.

ВПРАВИ

32.1.° Фігура складається з трьох точок. З якої кількості точок може складатися паралельна проекція цієї фігури?

32.2.° Чи може паралельною проекцією двох прямих, що перетинаються, бути:
1) дві прямі, що перетинаються;
2) дві паралельні прямі;
3) пряма;
4) пряма та точка поза нею?

32.3.° Яка геометрична фігура не може бути паралельною проекцією двох мимобіжних прямих:
1) дві паралельні прямі;
2) дві прямі, що перетинаються;
3) пряма;
4) пряма та точка поза нею?

32.4.° 1) Чи можуть рівні відрізки бути паралельними проекціями нерівних відрізків?
2) Чи можуть нерівні відрізки бути паралельними проекціями рівних відрізків?
3) Чи може паралельна проекція відрізка бути більшою за даний відрізок?
4) Чи може паралельна проекція прямої бути паралельною даній прямій?

32.5.° Чи може фігура, зображена на рисунку 32.12, бути паралельною проекцією трикутника?

32.6.° Чи може паралельною проекцією трапеції бути чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$, кути якого A_1, B_1, C_1 і D_1 відповідно дорівнюють:
1) $10°$, $40°$, $140°$, $170°$; 2) $50°$, $130°$, $50°$, $130°$?

32.7.° Чи може паралельною проекцією паралелограма бути чотирикутник зі сторонами 6 см, 8 см, 6 см, 9 см?

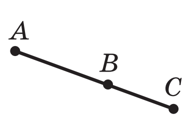


Рис. 32.12

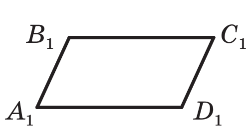


Рис. 32.13

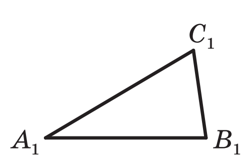


Рис. 32.14

32.8.• Точки A_1, B_1 і C_1 є паралельними проекціями відповідно точок A, B і C, які лежать на одній прямій (точка B лежить між точками A і C). Знайдіть відрізок B_1C_1, якщо $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $A_1B_1 = 12$ см.

32.9.• Точки A_1, B_1 і C_1 є паралельними проекціями відповідно точок A, B і C, які лежать на одній прямій (точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1). Знайдіть відрізок A_1C_1, якщо $AB = 10$ см, $AC = 16$ см, $B_1C_1 = 3$ см.

32.10.•• Паралелограм $A_1B_1C_1D_1$ є зображенням прямокутника $ABCD$ (рис. 32.13). Побудуйте зображення перпендикуляра, опущеного з точки перетину діагоналей прямокутника на сторону BC.

32.11.•• Трикутник $A_1B_1C_1$ є зображенням прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AB (рис. 32.14). Побудуйте зображення перпендикуляра, опущеного із середини гіпотенузи на катет AC.

32.12.•• Трикутник $A_1B_1C_1$ — зображення трикутника ABC. Побудуйте зображення бісектриси трикутника ABC, проведеної з вершини B, якщо $AB : BC = 1 : 2$.

32.13.•• Трикутник $A_1B_1C_1$ — зображення рівнобедреного трикутника ABC з основою AC. Побудуйте зображення центра кола, вписаного в трикутник ABC, якщо $AB : AC = 5 : 4$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

32.14. У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 6$ см, $AD = 2\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут між прямими AC і BD.

УКРАЇНА МАЄ ТАЛАНТИ!

Як треба скласти апельсини у велику коробку, щоб помістилося якомога більше? Це питання, на перший погляд просте й несерйозне, має давню історію. У 1611 р. німецький астроном, математик і філософ Йоганн Кеплер, відомий відкриттям законів руху планет Сонячної системи, сформулював задачу про оптимальне пакування куль у просторі. Кеплер висунув гіпотезу, згідно з якою оптимально буде розкласти кулі так, як інколи викладають апельсини в магазинах чи на ринках (рис. 32.15).

Протягом 400 років провідні математики світу намагалися обґрунтувати це припущення. Остаточну крапку в цьому питанні було поставлено лише у 2017 році. Доведення гіпотези Кеплера, яке містило комп'ютерний перебір величезної кількості варіантів та яке ретельно перевіряли 19 років, було нарешті визнано коректним.

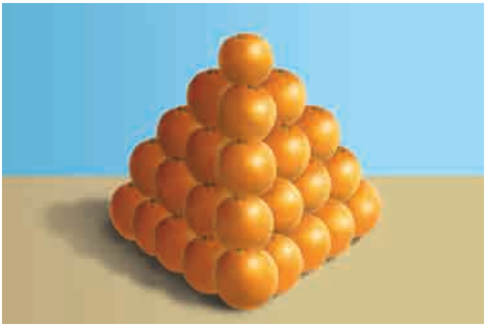


Рис. 32.15

Важливу роль у цій багатовіковій історії зіграли молоді українські вчені в галузі математики А. Бондаренко, М. В'язовська та Д. Радченко, які навчалися в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. У 2016 р. вийшли статті з розв'язанням задачі Кеплера для випадків 8- та 24-вимірного простору. Марина В'язовська, авторка цих статей, була нагороджена премією Салема. Ця премія є надзвичайно престижною. Вищою є лише премія Філдса — аналог Нобелівської премії для математиків.

Це блискуче досягнення українських науковців!

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Основні аксіоми стереометрії

А1. У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії.
А2. Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і до того ж тільки одна.
А3. Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.
А4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

Площина однозначно визначається:

1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не належить цій прямій;
3) двома прямими, що перетинаються;
4) двома паралельними прямими.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Дві прямі називають такими, що перетинаються, якщо вони мають тільки одну спільну точку.

Дві прямі в просторі називають паралельними, якщо вони лежать в одній площині та не перетинаються.

Дві прямі в просторі називають мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині.

Властивості паралельних прямих

Через дві паралельні прямі проходить площина, і до того ж тільки одна.

Ознака мимобіжних прямих

Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі є мимобіжними.

Паралельність у просторі

Пряму та площину називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Дві площини називають паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Ознака паралельності прямої та площини

Якщо пряма, яка не належить даній площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то дана пряма паралельна самій площині.

Умови паралельності двох прямих у просторі

Якщо площина проходить через дану пряму, паралельну другій площині, та перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.

Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються по прямій, відмінній від двох даних, то ця пряма паралельна кожній із двох даних прямих.

Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Ознака паралельності двох площин

Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини паралельні відповідно двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

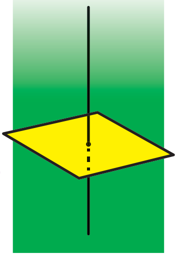
Властивості паралельних площин

Через точку в просторі, яка не належить даній площині, проходить площина, паралельна даній площині, і до того ж тільки одна.

Прямі перетину двох паралельних площин третьою площиною паралельні.

Відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ У ПРОСТОРІ §5



У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттями кута між прямими в просторі, кута між прямою та площиною, кута між двома площинами; дізнаєтеся, що таке ортогональна проекція, вивчите властивість ортогональної проекції многокутника.

33. Кут між прямими в просторі

Оскільки дві будь-які прямі простору, що перетинаються, лежать в одній площині, то кут між ними означимо так само, як і в планіметрії.

Означення. Кутом між двома прямими, що перетинаються, називають величину того з кутів, утворених при їхньому перетині, який не більший за $90°$ (рис. 33.1).

Вважають, що кут між двома паралельними прямими дорівнює $0°$. Отже, якщо φ — кут між двома прямими, які лежать в одній площині, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Введемо поняття кута між мимобіжними прямими.

Означення. Кутом між двома мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються та відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

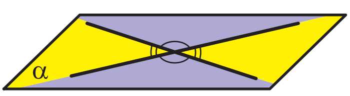


Рис. 33.1

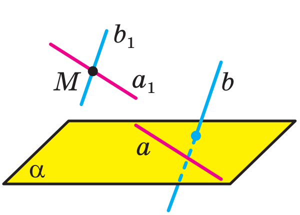


Рис. 33.2

Нехай прямі a і b мимобіжні. Через точку M простору проведемо прямі a_1 і b_1 так, що $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рис. 33.2). За означенням кут між мимобіжними прямими a і b дорівнює куту між прямими a_1 і b_1, що перетинаються.

Виникає природне запитання: чи залежить кут між даними мимобіжними прямими a і b від вибору точки M? Дати відповідь на це запитання допомагає така теорема.

Теорема 33.1. ***Кут між двома прямими, що перетинаються, дорівнює куту між двома іншими прямими, що перетинаються та відповідно паралельні даним.***

Скориставшись теоремою 33.1, можна показати, що *кут між мимобіжними прямими a і b дорівнює куту між прямими a і b_1, що перетинаються, де $b_1 \parallel b$.*

Наприклад, на рисунку 33.3 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Кут між мимобіжними прямими AA_1 і BC дорівнює куту між прямими BB_1 і BC, що перетинаються.

Означення. Дві прямі в просторі називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Зауважимо, що перпендикулярні прямі можуть як перетинатися, так і бути мимобіжними.

Якщо прямі a і b перпендикулярні, то записують: $a \perp b$.

Два відрізки в просторі називають **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Наприклад, ребра AD і CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярні (рис. 33.4). Справді, оскільки $DD_1 \parallel CC_1$, то кут між прямими AD і CC_1 дорівнює куту між прямими AD і DD_1. Але $\angle ADD_1 = 90°$, тому $AD \perp CC_1$.

Задача. На рисунку 33.5 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між прямими A_1D і D_1C.

Розв'язання. Сполучимо точки A_1 і B. Оскільки $A_1D_1 \parallel BC$, то точки A_1, D_1, C і B лежать в одній площині. Ця площина перетинає паралельні площини AA_1B і DD_1C по паралельних прямих A_1B і D_1C. Отже, кут між прямими A_1D і D_1C дорівнює куту DA_1B.

Сполучимо точки B і D. Відрізки A_1D, A_1B і BD є рівними як діагоналі рівних квадратів. Отже, трикутник A_1BD рівносторонній. Тоді $\angle DA_1B = 60°$.

Відповідь: 60°. ◀

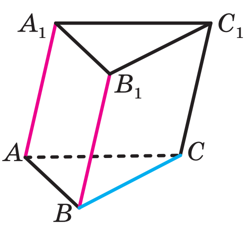


Рис. 33.3

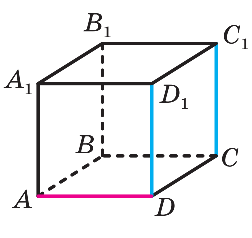


Рис. 33.4

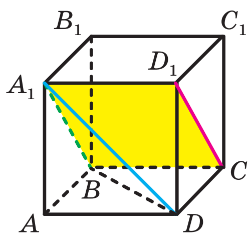


Рис. 33.5

1. Що називають кутом між двома прямими, що перетинаються?
2. Чому дорівнює кут між двома паралельними прямими?
3. Що називають кутом між двома мимобіжними прямими?
4. Які дві прямі в просторі називають перпендикулярними?
5. Які два відрізки в просторі називають перпендикулярними?

ВПРАВИ

33.1.° Скільки в просторі можна провести прямих, перпендикулярних до даної прямої, через точку: 1) яка належить даній прямій; 2) яка не належить даній прямій?

33.2.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 33.6). Знайдіть кут між прямими: 1) CD і BC; 2) AA_1 і C_1D_1; 3) AA_1 і D_1C; 4) AC і B_1D_1; 5) A_1C_1 і AC.

33.3.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 33.6). Знайдіть кут між прямими: 1) AB і BB_1; 2) AB і B_1D_1; 3) A_1D і B_1C; 4) B_1D_1 і C_1C.

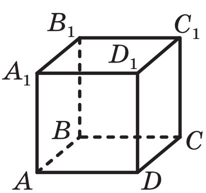


Рис. 33.6

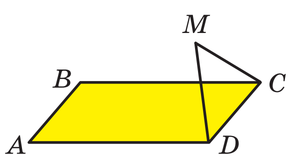


Рис. 33.7

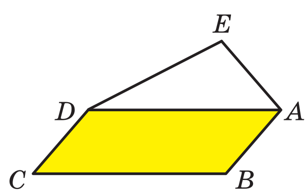


Рис. 33.8

33.4.° Точка M, яка не належить площині прямокутника $ABCD$, є такою, що трикутник CMD рівносторонній (рис. 33.7). Знайдіть кут між прямими AB і MC.

33.5.° Точка M не належить площині квадрата $ABCD$, $\angle MBA = 40°$, $\angle MBC = 90°$. Знайдіть кут між прямими: 1) MB і AD; 2) MB і CD.

33.6.• Трапеція $ABCD$ з основами AD і BC та трикутник MEF не лежать в одній площині, точка E — середина відрізка AB, точка F — середина відрізка CD, $ME = FE$, $\angle MEF = 110°$. Знайдіть кут між прямими: 1) AD і EF; 2) AD і ME; 3) BC і MF.

33.7.• Паралелограм $ABCD$ і трикутник AED не лежать в одній площині (рис. 33.8). Знайдіть кут між прямими BC і AE, якщо $\angle AED = 70°$, $\angle ADE = 30°$.

33.8.• Відомо, що $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (рис. 33.9). Знайдіть відрізок CD, якщо $BC = 17$ см, $AB = 15$ см, $BD = 3\sqrt{29}$ см.

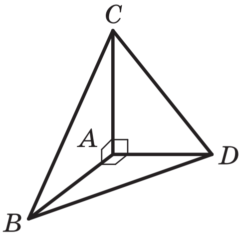


Рис. 33.9

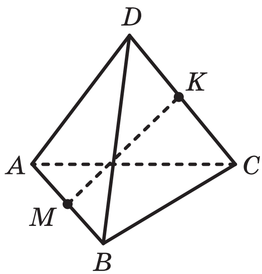


Рис. 33.10

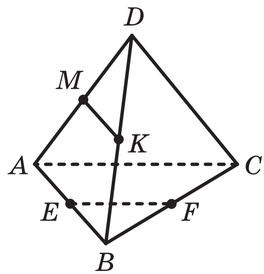


Рис. 33.11

33.9.• Відомо, що $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ (рис. 33.9). Знайдіть відрізок BC, якщо $CD = 2\sqrt{43}$ см, $BD = 12$ см, $\angle ABD = 60°$.

33.10.•• Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a, точки M і K — середини ребер AB і CD відповідно (рис. 33.10). Знайдіть відрізок MK.

33.11.•• Точки E, F, M і K — середини відповідно ребер AB, BC, AD і BD тетраедра $DABC$ (рис. 33.11). Знайдіть кут між прямими EF і MK, якщо $\angle BAC = \alpha$.

33.12.•• Діагоналі грані $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перетинаються в точці O. Знайдіть кут між прямими OB_1 і A_1C_1.

33.13.•• Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат, сторона якого дорівнює a. Знайдіть кут між прямими AD_1 і B_1C, якщо бічне ребро паралелепіпеда дорівнює $a\sqrt{3}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

33.14. Діагоналі AC і BD паралелограма $ABCD$ дорівнюють відповідно 24 см і 10 см, $AD = 13$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

34. Перпендикулярність прямої та площини

У повсякденному житті ми говоримо: флагшток перпендикулярний до поверхні землі (рис. 34.1), щогли вітрильника перпендикулярні до поверхні палуби (рис. 34.2), шуруп вкручують у дошку перпендикулярно до її поверхні (рис. 34.3) тощо.

Рис. 34.1

Рис. 34.2

Рис. 34.3

Ці приклади дають уявлення про пряму, перпендикулярну до площини.

Означення. **Пряму називають перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині** (рис. 34.4).

Якщо пряма a перпендикулярна до площини α, то записують: $a \perp \alpha$. Також прийнято говорити, що площина α перпендикулярна до прямої a або пряма a та площина α перпендикулярні.

З означення випливає, що коли пряма a перпендикулярна до площини α, то вона перетинає цю площину.

Відрізок називають **перпендикулярним до площини**, якщо він належить прямій, перпендикулярній до цієї площини.

Наприклад, інтуїтивно зрозуміло, що ребро AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 34.5). Довести цей факт нескладно, скориставшись такою теоремою.

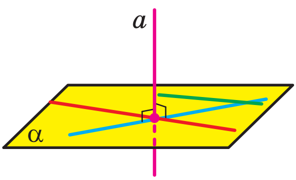


Рис. 34.4

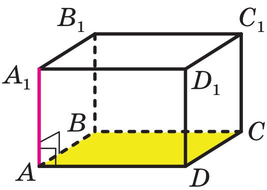


Рис. 34.5

Теорема 34.1 (ознака перпендикулярності прямої та площини). ***Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.***

Рис. 34.6

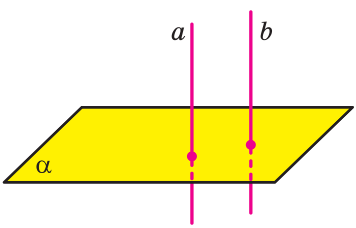
На рисунку 34.5 пряма AA_1 перпендикулярна до двох прямих AB і AD площини ABC, що перетинаються. Тоді за ознакою перпендикулярності прямої та площини $AA_1 \perp ABC$, а отже, і ребро AA_1 також перпендикулярне до площини ABC.

Теорему 34.1 часто використовують на практиці. Наприклад, підставка для новорічної ялинки має форму хрестовини. Якщо ялинку встановити так, щоб її стовбур був перпендикулярним до напрямів хрестовини, то ялинка стоятиме перпендикулярно до площини підлоги (рис. 34.6).

Наведемо теорему, яку можна розглядати як ще одну ознаку перпендикулярності прямої та площини.

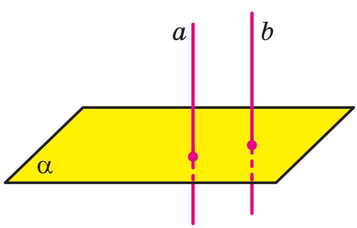
Теорема 34.2. ***Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до цієї площини*** (рис. 34.7).

Наприклад, на рисунку 34.5 пряма AA_1 перпендикулярна до площини ABC, а пряма CC_1 паралельна прямій AA_1. Отже, за теоремою 34.2 пряма CC_1 також є перпендикулярною до площини ABC.



Якщо $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$

Рис. 34.7



Якщо $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$

Рис. 34.8

Сформулюємо теорему, що є ознакою паралельності двох прямих.

Теорема 34.3. ***Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні*** (рис. 34.8).

Справедлива й така теорема.

Теорема 34.4. ***Через дану точку можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини, і до того ж тільки одну.***

Задача. Площина α, перпендикулярна до катета AC прямокутного трикутника ABC, перетинає катет AC у точці E, а гіпотенузу AB — у точці F (рис. 34.9). Знайдіть відрізок EF, якщо $AE : EC = 3 : 4$, $BC = 21$ см.

Розв'язання. Оскільки пряма AC перпендикулярна до площини α, то пряма AC перпендикулярна до будь-якої прямої цієї площини, зокрема до прямої EF. Прямі EF і BC лежать в одній площині та перпендикулярні до прямої AC, тому $EF \parallel BC$. Із цього випливає, що трикутники AEF і ACB подібні. Отже, можна записати: $EF : CB = AE : AC$. Звідси $EF : 21 = 3 : 7$, $EF = 9$ см.

Відповідь: 9 см. ◄

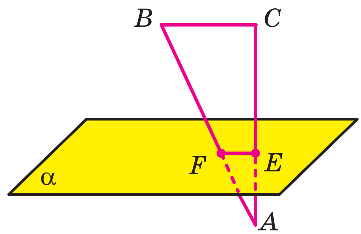


Рис. 34.9

1. Яку пряму називають перпендикулярною до площини?
2. Який відрізок називають перпендикулярним до площини?
3. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої та площини.
4. Сформулюйте теорему про дві паралельні прямі, одна з яких перпендикулярна до площини.
5. Сформулюйте теорему про дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини.

ВПРАВИ

34.1.° Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи існують у площині α прямі, не перпендикулярні до прямої a?

34.2.° Пряма m перпендикулярна до прямих a і b площини α. Чи випливає із цього, що пряма m перпендикулярна до площини α?

34.3.° Чи є правильним твердження, що коли пряма не перпендикулярна до площини, то вона не перпендикулярна до жодної прямої цієї площини?

34.4.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 34.10). Назвіть грані куба, до яких перпендикулярна пряма: 1) AA_1; 2) AD.

34.5.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 34.10). Укажіть ребра куба, які перпендикулярні до площини грані: 1) AA_1B_1B; 2) $A_1B_1C_1D_1$.

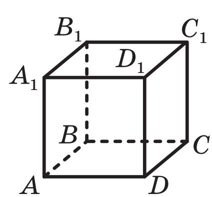


Рис. 34.10

34.6.° Чи є правильним твердження, що пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна:

1) до сторони та медіани трикутника, який лежить у цій площині;
2) до сторони та середньої лінії трикутника, який лежить у цій площині;
3) до двох сторін трапеції, яка лежить у цій площині;
4) до двох діаметрів кола, яке лежить у цій площині?

34.7.° Через центр O правильного трикутника ABC проведено пряму DO, перпендикулярну до площини ABC (рис. 34.11). Знайдіть відрізок DO, якщо $AB = 6$ см, $DA = 4$ см.

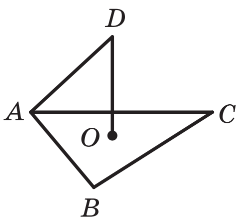


Рис. 34.11

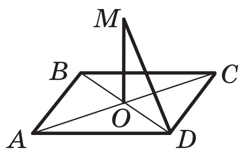


Рис. 34.12

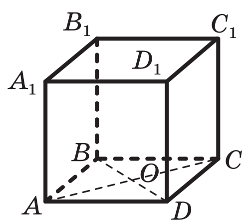


Рис. 34.13

34.8.° Через центр O квадрата $ABCD$ проведено пряму MO, перпендикулярну до площини квадрата (рис. 34.12). Знайдіть відстань від точки M до вершини D, якщо $AD = 4\sqrt{2}$ см, $MO = 2$ см.

34.9.• Точка O — центр грані $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a (рис. 34.13). Знайдіть:

1) відстань від точки O до вершини B_1 куба;
2) тангенс кута між прямими B_1O і DD_1.

34.10.• Діагональ B_1D прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 17 см, а діагональ AB_1 бічної грані AA_1B_1B дорівнює 15 см (рис. 34.14). Знайдіть ребро AD паралелепіпеда.

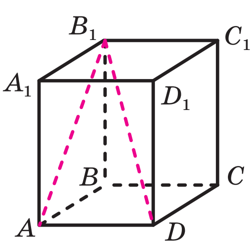


Рис. 34.14

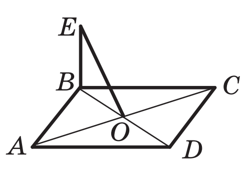


Рис. 34.15

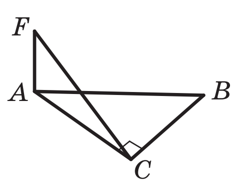


Рис. 34.16

34.11.• Через вершину B ромба $ABCD$ проведено пряму BE, перпендикулярну до площини ромба (рис. 34.15). Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини BEO.

34.12.• Через вершину A прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) проведено пряму AF, перпендикулярну до площини ABC (рис. 34.16). Доведіть, що пряма BC перпендикулярна до площини AFC.

34.13.•• Відрізок AB не перетинає площину α. Через точки A і B проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках C і D відповідно. Знайдіть відрізок CD, якщо $AC = 34$ см, $BD = 18$ см, $AB = 20$ см.

34.14.•• Відрізок AB не перетинає площину α. Через точки A і B проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках A_1 і B_1 відповідно. Знайдіть відрізок AB, якщо $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 12$ см, $AB_1 = 10$ см.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

34.15. Із точки до прямої проведено дві похилі, проекції яких на пряму дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть відстань від даної точки до цієї прямої, якщо одна з похилих на 2 см більша за другу.

35. Перпендикуляр і похила

Нехай фігура F_1 — паралельна проекція фігури F на площину α в напрямі прямої l. Якщо $l \perp \alpha$, то фігуру F_1 називають **ортогональною проекцією** фігури F на площину α.

Наприклад, основа $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ортогональною проекцією основи $A_1B_1C_1D_1$ на площину ABC у напрямі прямої AA_1 (рис. 35.1).

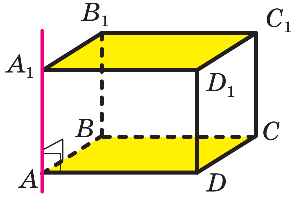


Рис. 35.1

Надалі, говорячи про проекцію фігури, якщо не обумовлено інше, матимемо на увазі ортогональну проекцію.

Нехай дано площину α і точку A, яка їй не належить. Через точку A проведемо пряму a, перпендикулярну до площини α.

Нехай $a \cap \alpha = B$ (рис. 35.2). Відрізок AB називають **перпендикуляром**, опущеним із точки A на площину α, точку B — **основою перпендикуляра**. Основа B перпендикуляра AB — це проекція точки A на площину α.

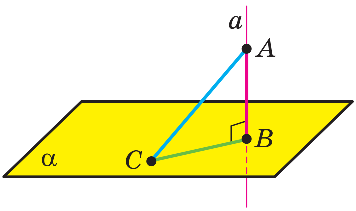


Рис. 35.2

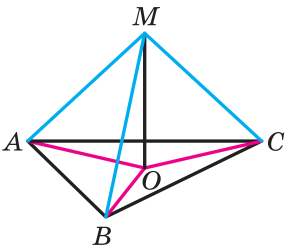


Рис. 35.3

Позначимо на площині α яку-небудь точку C, відмінну від точки B. Проведемо відрізок AC (рис. 35.2). Відрізок AC називають **похилою**, проведеною з точки A до площини α, точку C — **основою похилої**. Відрізок BC є **проекцією похилої** AC.

Теорема 35.1. ***Якщо з однієї точки проведено до площини перпендикуляр і похилу, то похила більша за перпендикуляр.***

Задача 1. Доведіть, що коли точка, яка не належить площині многокутника, рівновіддалена від його вершин, то проекцією цієї точки на площину многокутника є центр його описаного кола.

Розв'язання. Проведемо доведення для трикутника. Для інших многокутників доведення буде аналогічним.

Нехай точка M не належить площині ABC, причому $MA = MB = MC$. Опустимо з точки M перпендикуляр MO на площину ABC (рис. 35.3). Доведемо, що точка O — центр описаного кола трикутника ABC.

Оскільки $MO \perp ABC$, то $\angle MOA = \angle MOB = \angle MOC = 90°$. У прямокутних трикутниках MOA, MOB, MOC катет MO — спільний, гіпотенузи рівні, а отже, ці трикутники є рівними за гіпотенузою та катетом. З рівності цих трикутників випливає, що $OA = OB = OC$, тобто точка O — центр описаного кола трикутника ABC. ◄

Зауважимо, що коли потрібно визначити відстань між двома геометричними фігурами, то намагаються знайти відстань між їхніми найближчими точками. Наприклад, із курсу планіметрії вам відомо, що відстанню від точки, яка не належить прямій, до цієї прямої називають відстань від даної точки до найближчої точки на прямій, тобто довжину перпендикуляра, опущеного з точки на пряму.

Теорема 35.1 показує, що доцільно прийняти таке означення.

Означення. Якщо точка не належить площині, то відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, опущеного з точки на площину. Якщо точка належить площині, то вважають, що відстань від точки до площини дорівнює нулю.

Задача 2. Доведіть, що коли пряма паралельна площині, то всі точки прямої рівновіддалені від площини.

Розв'язання. Нехай A і B — дві довільні точки прямої a, паралельної площині α. Точки A_1 і B_1 — основи перпендикулярів, опущених відповідно з точок A і B на площину α (рис. 35.4). Доведемо, що $AA_1 = BB_1$.

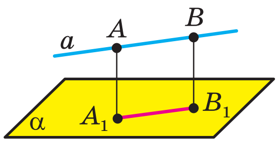


Рис. 35.4

За теоремою 34.3 $AA_1 \parallel BB_1$. Отже, точки A, A_1, B_1, B лежать в одній площині. Площина ABB_1 проходить через пряму a, паралельну площині α, і перетинає площину α по прямій A_1B_1. Тоді за теоремою 30.2 отримуємо: $AB \parallel A_1B_1$. Таким чином, у чотирикутнику AA_1B_1B кожні дві протилежні сторони паралельні. Отже, чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм. Звідси $AA_1 = BB_1$.

Оскільки точки A і B вибрано на прямій a довільно, то твердження задачі доведено. ◄

Доведена властивість дає змогу прийняти такі означення.

Означення. Відстанню від прямої до паралельної їй площини називають відстань від будь-якої точки цієї прямої до площини.

Використовуючи результат, отриманий у ключовій задачі 2, можна розв'язати таку задачу.

Задача 3. Доведіть, що коли дві площини паралельні, то всі точки однієї площини рівновіддалені від другої площини.

Означення. Відстанню між двома паралельними площинами називають відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

Результати, отримані в ключових задачах 2 і 3, часто використовують у практичній діяльності, наприклад у будівництві (рис. 35.5).

Рис. 35.5

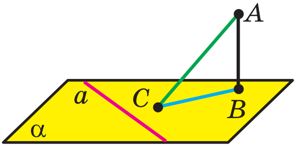


Рис. 35.6

Теорема 35.2 (теорема про три перпендикуляри). ***Якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до проекції похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до самої похилої. І навпаки, якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до проекції похилої на цю площину.***

Доведення. Доведемо першу частину теореми.

Нехай пряма a, яка належить площині α, перпендикулярна до проекції BC похилої AC (рис. 35.6). Доведемо, що $a \perp AC$.

Маємо: $AB \perp \alpha$, $a \subset \alpha$, отже, $AB \perp a$. Отримали, що пряма a перпендикулярна до двох прямих AB і BC площини ABC, які перетинаються; отже, $a \perp ABC$. Оскільки $AC \subset ABC$, то $a \perp AC$.

Доведення другої частини теореми аналогічне доведенню першої частини. ◄

Задача 4. Точка M не належить площині опуклого многокутника й рівновіддалена від усіх прямих, які містять його сторони. Проекцією точки M на площину многокутника є точка O, яка належить многокутнику. Доведіть, що точка O — центр вписаного кола многокутника.

Розв'язання. Проведемо доведення для трикутника. Для інших многокутників доведення буде аналогічним.

Опустимо з точки O перпендикуляри ON, OK і OE відповідно на прямі AB, BC і CA (рис. 35.7). Сполучимо точку M з точками E, K і N.

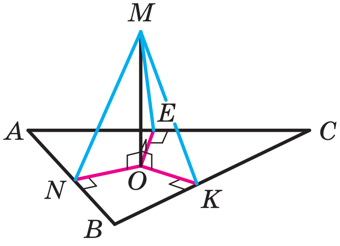


Рис. 35.7

Відрізок ON є проекцією похилої MN на площину ABC. За побудовою $ON \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри отримуємо: $MN \perp AB$.

Аналогічно можна довести, що $MK \perp BC$ і $ME \perp CA$. Отже, довжини відрізків MN, MK і ME — відстані від точки M до прямих AB, BC і CA відповідно. За умовою $MN = MK = ME$.

У прямокутних трикутниках MON, MOK, MOE катет MO спільний, гіпотенузи рівні; отже, ці трикутники є рівними за катетом і гіпотенузою. З рівності цих трикутників випливає, що $ON = OK = OE$.

Довжини відрізків ON, OK і OE є відстанями від точки O до прямих, які містять сторони трикутника ABC. Ми показали, що ці відстані є рівними. Оскільки точка O належить трикутнику ABC, то точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. ◀

1. У якому разі говорять, що фігура F_1 є ортогональною проекцією фігури F?
2. Опишіть, який відрізок називають: 1) перпендикуляром, опущеним із точки на площину; 2) похилою, проведеною з точки до площини.
3. Сформулюйте теорему про перпендикуляр і похилу, проведені до площини з однієї точки.
4. Що називають відстанню від точки до площини? відстанню від прямої до паралельної їй площини? відстанню між двома паралельними площинами?
5. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.

ВПРАВИ

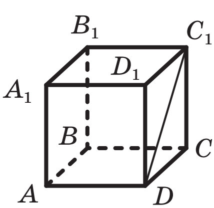


Рис. 35.8

35.1.° На рисунку 35.8 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть проекцію відрізка C_1D на площину:

1) ABC;
2) BB_1C;
3) AA_1B_1.

35.2.° На рисунку 35.9 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть проекцію відрізка DB_1 на площину:
1) $A_1B_1C_1$; 2) CDD_1; 3) AA_1D_1.

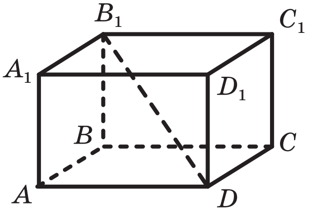


Рис. 35.9

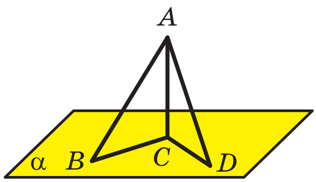


Рис. 35.10

35.3.° Із точки до площини проведено перпендикуляр завдовжки 12 см і похилу завдовжки 13 см. Знайдіть проекцію цієї похилої на дану площину.

35.4.° Із точки A до площини α проведено перпендикуляр і похилу завдовжки $\sqrt{7}$ см. Проекція даної похилої на площину дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від точки A до площини α.

35.5.° Із точки A проведено до площини α перпендикуляр AC та похилі AB і AD (рис. 35.10). Знайдіть проекцію похилої AD на площину α, якщо $\angle BAC = 45°$, $AB = 8$ см, $AD = 9$ см.

35.6.° Із точки M проведено до площини α перпендикуляр MH та похилі MA і MB (рис. 35.11). Знайдіть похилу MA, якщо $BH = 6\sqrt{6}$ см, $MB = 18$ см, $\angle MAH = 60°$.

35.7.• Доведіть, що рівні похилі, проведені до площини з однієї точки, мають рівні проекції.

35.8.• Доведіть, що коли проекції двох похилих, проведених до площини з однієї точки, рівні, то є рівними й похилі.

35.9.• Відстань між паралельними прямими, які належать відповідно паралельним площинам α і β, дорівнює 7 см. Чи є правильним твердження, що відстань між площинами α і β дорівнює 7 см?

35.10.• Із точки M провели до площини α рівні похилі MA, MB, MC і MD. Чи можуть точки A, B, C і D бути вершинами:
1) прямокутника;
2) ромба;
3) прямокутної трапеції;
4) рівнобічної трапеції?

35.11.• На рисунку 35.12 зображено квадрат $ABCD$, пряма NC перпендикулярна до його площини. Доведіть, що прямі BD і NO перпендикулярні.

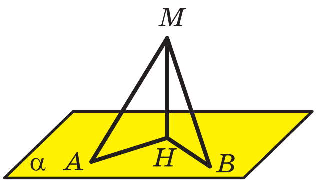


Рис. 35.11

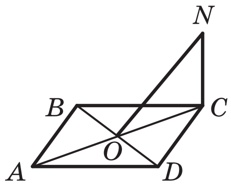


Рис. 35.12

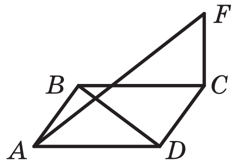


Рис. 35.13

35.12.• На рисунку 35.13 зображено ромб *ABCD*. Пряма *FC* перпендикулярна до його площини. Доведіть, що прямі *AF* і *BD* перпендикулярні.

35.13.• На рисунку 35.14 зображено рівносторонній трикутник *ABC*, точка *D* — середина сторони *BC*. Пряма *AM* перпендикулярна до площини *ABC*. Доведіть, що $MD \perp BC$.

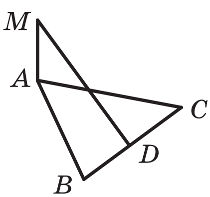


Рис. 35.14

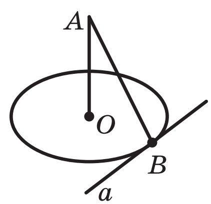


Рис. 35.15

35.14.• Пряма *AO* перпендикулярна до площини кола із центром *O* (рис. 35.15). Пряма *a* належить площині кола й дотикається до даного кола в точці *B*. Доведіть, що $AB \perp a$.

35.15.• Доведіть, що коли точка належить прямій, яка перпендикулярна до площини многокутника та проходить через центр кола, описаного навколо многокутника, то ця точка рівновіддалена від вершин многокутника.

35.16.• Із точки *A* до площини α проведено похилі *AB* і *AC* завдовжки 25 см і 17 см відповідно. Знайдіть відстань від точки *A* до площини α, якщо проекції даних похилих на цю площину відносяться як 5 : 2.

35.17.• Із точки *D* до площини α проведено похилі *DA* і *DB*, сума яких дорівнює 28 см. Знайдіть ці похилі, якщо їхні проекції на площину α дорівнюють відповідно 9 см і 5 см.

35.18.• Точка *M* розташована на відстані 6 см від кожної вершини правильного трикутника *ABC*, сторона якого дорівнює 9 см. Знайдіть відстань від точки *M* до площини *ABC*.

35.19.• Катети прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) дорівнюють 6 см і 8 см. Точка D віддалена від кожної вершини даного трикутника на 13 см. Знайдіть відстань від точки D до площини ABC.

35.20.• Відрізок BD — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC з основою AC (рис. 35.16). Побудуйте перпендикуляр, опущений із точки D на пряму AC.

35.21.• Відрізок BD — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC із прямим кутом при вершині C (рис. 35.17). Побудуйте перпендикуляр, опущений із точки D на пряму AC.

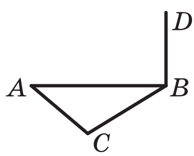


Рис. 35.16

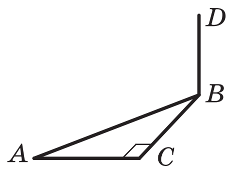


Рис. 35.17

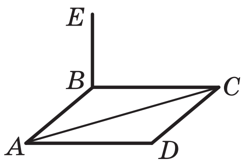


Рис. 35.18

35.22.• Відрізок BE — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$ (рис. 35.18). Побудуйте перпендикуляр, опущений із точки E на пряму AC.

35.23.• Точка M рівновіддалена від усіх прямих, які містять сторони правильного трикутника ABC. Проекцією точки M на площину ABC є точка O, яка належить трикутнику. Знайдіть відстань від точки M до сторони AB, якщо відстань від цієї точки до площини ABC дорівнює $3\sqrt{2}$ см, $AB = 18$ см.

35.24.• Сторона ромба дорівнює 10 см, а одна з діагоналей — 16 см. Точка M розташована на відстані 5,2 см від кожної прямої, що містить сторону ромба. Знайдіть відстань від точки M до площини ромба.

35.25.•• Із точки M до площини α проведено похилі MN і MK, які утворюють зі своїми проекціями на дану площину кути по 60°. Знайдіть відстань між основами даних похилих, якщо кут між похилими становить 90°, а відстань від точки M до площини α дорівнює $\sqrt{3}$ см.

35.26.•• Із точки A до площини α проведено похилі AB і AC, які утворюють зі своїми проекціями на дану площину кути по 30°. Знайдіть дані похилі та відстань від точки A до площини α, якщо кут між проекціями похилих становить 90°, а відстань між основами похилих дорівнює 6 см.

35.27.•• Відрізок DA — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $AB = 10$ см, $AC = 17$ см, $BC = 21$ см. Знайдіть відстань від точки D до прямої BC, якщо відстань від точки D до площини ABC дорівнює 15 см.

35.28.•• Відрізок AB — діаметр кола із центром O, відрізок BC — його хорда, $AB = 12$ см, $\angle ABC = 30°$. Відрізок AE — перпендикуляр до площини даного кола. Знайдіть відстань від точки E до площини кола, якщо відстань від точки E до прямої BC дорівнює 10 см.

35.29.•• Відрізок MA — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$. Знайдіть відстань від точки M до прямої CD, якщо $\angle BAD = 30°$, $AD = 10$ см, $MA = 5\sqrt{3}$ см.

35.30.•• Відрізок DA — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $\angle ABC = 120°$, $AB = 14$ см. Знайдіть відстань від точки D до площини ABC, якщо ця точка віддалена від прямої BC на $2\sqrt{43}$ см.

35.31.•• Точка M не належить площині трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$) і розташована на відстані $2\sqrt{5}$ см від кожної з прямих, що містять його сторони. Проекцією точки M на площину ABC є точка O, яка належить даному трикутнику. Точка дотику з гіпотенузою AB кола, вписаного в трикутник ABC, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 10 см. Знайдіть відстань від точки M до площини ABC.

35.32.•• Точка M не належить площині многокутника, а її проекцією на площину многокутника є центр кола, вписаного в многокутник. Доведіть, що точка M рівновіддалена від сторін даного многокутника.

35.33.•• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 16 см і 36 см. Через центр O кола, вписаного в цю трапецію, до її площини проведено перпендикуляр MO. Точка M розташована на відстані 16 см від площини трапеції. Знайдіть відстань від точки M до сторін трапеції.

35.34.•• Точка O — центр кола, вписаного в трапецію $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $CD = 12$ см, $\angle ADC = 45°$. Відрізок MO — перпендикуляр до площини трапеції. Точка M віддалена від площини трапеції на $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від точки M до сторін трапеції.

35.35.* Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $CD_1 \perp AB_1C_1$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

35.36. Сторона правильного трикутника, описаного навколо кола, дорівнює 12 см. Знайдіть сторону квадрата, описаного навколо даного кола.

36. Кут між прямою та площиною

Ви знаєте, що в стародавні часи мандрівники орієнтувалися за зорями. Вони вимірювали кут, що утворював із площиною горизонту промінь, який ішов від даної точки до небесного тіла.

Сьогодні людині у своїй діяльності також важливо вміти визначати кути, під якими нахилені до даної площини деякі об'єкти (рис. 36.1).

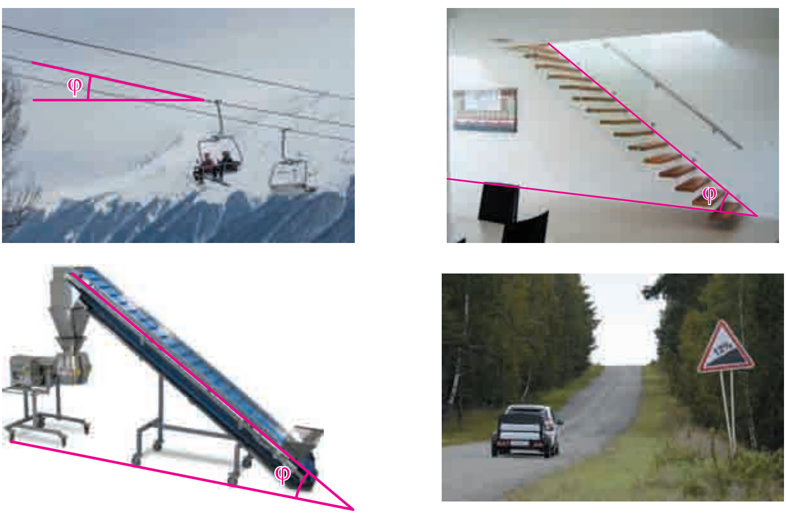


Рис. 36.1

Ці приклади показують, що доцільно ввести поняття кута між прямою та площиною.

Означення. **Якщо пряма паралельна площині або належить їй, то вважають, що кут між такою прямою та площиною дорівнює 0°.**

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то вважають, що кут між такою прямою та площиною дорівнює 90°.

Якщо пряма перетинає площину й не перпендикулярна до неї, то кутом між такою прямою та площиною називають кут між прямою та її проекцією на площину (рис. 36.2).

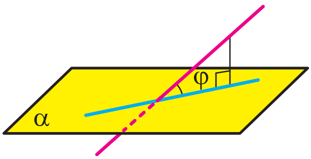


Рис. 36.2

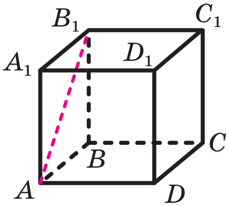


Рис. 36.3

З означення випливає, що коли φ — кут між прямою та площиною, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$.

Також прийнято говорити, що пряма утворює кут φ з площиною.

Кутом між відрізком і площиною називають кут між прямою, яка містить цей відрізок, і площиною.

Наприклад, розглянемо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 36.3). Кут між діагоналлю AB_1 грані AA_1B_1B і площиною ABC дорівнює 45°. Справді, пряма AB — проекція прямої AB_1 на площину ABC. Тоді кут між прямою AB_1 і площиною ABC дорівнює величині кута B_1AB. Оскільки чотирикутник AA_1B_1B — квадрат, то $\angle B_1AB = 45°$.

Задача. Доведіть, що коли з однієї точки до площини проведено похилі, які утворюють рівні кути з площиною, то проекція даної точки на площину рівновіддалена від основ похилих.

Розв'язання. Нехай MA і MB — похилі, які утворюють із площиною α рівні кути, відрізки OA і OB — проекції цих похилих (рис. 36.4). Доведемо, що $OA = OB$.

Пряма OA є проекцією прямої MA на площину α. Оскільки кут MAO гострий, то він дорівнює куту між прямими OA і MA. Отже, величина кута MAO дорівнює куту між похилою MA та площиною α. Аналогічно можна довести, що величина кута MBO дорівнює куту між похилою MB і площиною α. За умовою $\angle MAO = \angle MBO$.

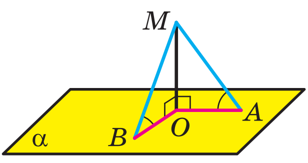


Рис. 36.4

Оскільки $MO \perp \alpha$, то $\angle MOA = \angle MOB = 90°$. Отримуємо, що прямокутні трикутники MOA і MOB є рівними за катетом і протилежним гострим кутом. Звідси $OA = OB$. ◀

1. Чому дорівнює кут між прямою та площиною, якщо пряма паралельна площині? пряма належить площині? пряма перпендикулярна до площини?
2. Що називають кутом між прямою та площиною, якщо пряма перетинає площину й не перпендикулярна до неї?

ВПРАВИ

36.1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка O — центр грані $ABCD$ (рис. 36.5). Укажіть кут між:

1) прямою AB_1 і площиною $A_1B_1C_1$;
2) прямою AC_1 і площиною ABC;
3) прямою AC_1 і площиною CDD_1;
4) прямою OA_1 і площиною ABC;
5) прямою AC і площиною ADD_1.

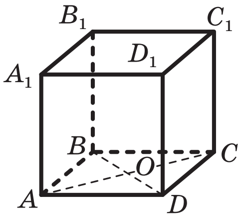


Рис. 36.5

36.2.° Із точки проведено до площини перпендикуляр і похилу, яка утворює з даною площиною кут 50°. Чому дорівнює кут між даною похилою та перпендикуляром?

36.3.° Із точки M до площини α проведено перпендикуляр MA та похилу MB, яка утворює з площиною α кут φ. Знайдіть: 1) проекцію похилої MB на площину α, якщо відстань від точки M до цієї площини дорівнює d; 2) похилу MB, якщо її проекція на площину α дорівнює a.

36.4.° Із точки A до площини α проведено похилу. Чому дорівнює кут між цією похилою та площиною α, якщо відстань від точки A до площини α: 1) дорівнює проекції похилої на площину α; 2) у два рази менша від самої похилої?

36.5.° Скільки похилих, які утворюють із площиною α кут 40°, можна провести з точки A, що не належить цій площині?

36.6.° Пряма MA перпендикулярна до площини ABC (рис. 36.6), $AB = AM = 6$ см, $AC = 2\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут, який утворює з площиною ABC пряма: 1) MB; 2) MC.

36.7.° Точка O — центр правильного трикутника ABC (рис. 36.7), сторона якого дорівнює 6 см. Пряма MA перпендикулярна до площини ABC. Знайдіть кут між прямою MO та площиною ABC, якщо $MA = 2$ см.

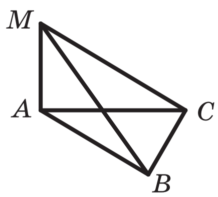


Рис. 36.6

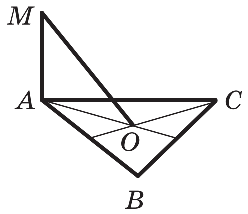


Рис. 36.7

36.8.• Доведіть, що рівні похилі, проведені до площини з однієї точки, утворюють із цією площиною рівні кути.

36.9.• Доведіть, що коли кути, утворені з площиною похилими, проведеними до неї з однієї точки, рівні, то рівні й самі похилі.

36.10.• Із точки M до площини α провели перпендикуляр MB і похилі MA та MC. Знайдіть кут між прямою MC і площиною α, якщо $MA = 5\sqrt{2}$ см, $MC = 10$ см, а кут між прямою MA та площиною α дорівнює $45°$.

36.11.• Із точки A до площини α провели перпендикуляр AH та похилі AB і AC, які утворюють із площиною відповідно кути $45°$ і $60°$. Знайдіть відрізок AB, якщо $AC = 4\sqrt{3}$ см.

36.12.• Із точки D до площини α проведено похилі DA і DB, які утворюють з даною площиною кути, що дорівнюють $30°$. Кут між проекціями даних похилих на площину α дорівнює $120°$. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо $DA = 2$ см.

36.13.• Із точки B до площини α проведено похилі BA і BC, які утворюють з даною площиною кути по $45°$. Відстань між основами похилих дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від точки B до площини α, якщо кут між похилими становить $60°$.

36.14.•• Точка A розташована на відстані $3\sqrt{3}$ см від площини α. Похилі AB і AC утворюють із площиною кути $60°$ і $45°$ відповідно, а кут між похилими дорівнює $90°$. Знайдіть відстань між основами похилих.

36.15.•• Із точки M до площини α проведено похилі MA і MB. Похила MA утворює з площиною α кут $45°$, а похила MB — кут $30°$. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо $MA = 6$ см, а кут між похилими дорівнює $45°$.

36.16.•• Точка M розташована на відстані 12 см від кожної вершини квадрата $ABCD$, кут між прямою MA та площиною квадрата дорівнює $60°$. Знайдіть відстань від точки M до сторони квадрата.

36.17.•• Точка M рівновіддалена від сторін квадрата $ABCD$, сторона якого дорівнює $9\sqrt{6}$ см, і розташована на відстані 9 см від площини квадрата. Знайдіть кут між прямою MA та площиною квадрата.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

36.18. Сторони трикутника дорівнюють 2 см, $2\sqrt{7}$ см і $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут трикутника, протилежний його середній стороні.

37. Двогранний кут. Кут між площинами

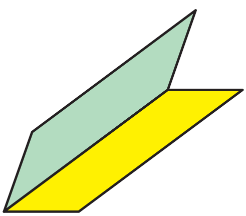


Рис. 37.1

На рисунку 37.1 зображено фігуру, яка складається з двох півплощин, що мають спільну межу. Ця фігура ділить простір на дві частини, виділені на рисунку 37.2 різними кольорами. Кожну із цих частин разом з півплощинами називають **двогранним кутом**. Півплощини називають **гранями двогранного кута**, а їхню спільну межу — **ребром двогранного кута**.

Як бачимо, «жовтий» і «синій» двогранні кути, зображені на рисунку 37.2, істотно різняться. Ця відмінність виражається такою властивістю. На гранях двогранного кута виберемо довільні точки M і N (рис. 37.3). Відрізок MN належить «жовтому» двогранному куту, а «синьому» двогранному куту належать лише кінці відрізка.

Надалі, говорячи «двогранний кут», матимемо на увазі такий двогранний кут, який містить будь-який відрізок із кінцями на його гранях («жовтий» двогранний кут).

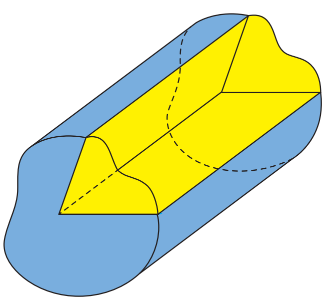


Рис. 37.2

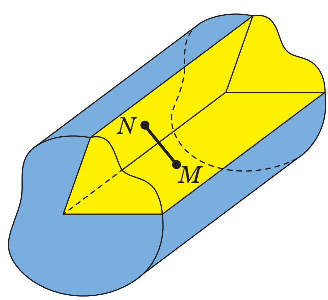


Рис. 37.3

Рис. 37.4

Наочне уявлення про двогранний кут дають напіввідкрита класна дошка, двоскатний дах, відкритий ноутбук (рис. 37.4).

Двогранний кут вважають просторовим аналогом кута на площині.

Ви знаєте, як визначають величину кута на площині. Навчимося визначати величину двогранного кута.

Позначимо на ребрі MN двогранного кута довільну точку O. Через точку O в гранях двогранного кута проведемо промені OA та OB перпендикулярно до ребра MN (рис. 37.5). Кут AOB, утворений цими променями, називають **лінійним кутом двогранного кута**. Оскільки $MN \perp OA$ і $MN \perp OB$, то $MN \perp AOB$. Таким чином, *якщо через довільну точку ребра двогранного кута провести площину перпендикулярно до ребра, то ця площина перетне двогранний кут по його лінійному куту*.

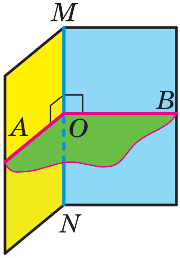


Рис. 37.5

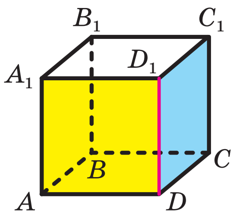


Рис. 37.6

Означення. Величиною двогранного кута називають величину його лінійного кута.

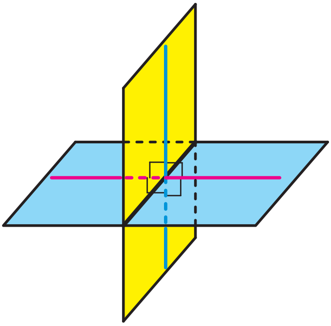
Двогранний кут називають гострим, прямим, тупим або розгорнутим, якщо його лінійний кут відповідно гострий, прямий, тупий або розгорнутий.

Наприклад, розглянемо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37.6). Двогранний кут з ребром DD_1, грані якого належать площинам ADD_1 і CDD_1, є прямим. Справді, оскільки $AD \perp DD_1$ і $CD \perp DD_1$, то кут ADC — лінійний кут двогранного кута з ребром DD_1. Кут ADC прямий.

У результаті перетину двох площин утворюються чотири двогранних кути, відмінних від розгорнутого (рис. 37.7). Тут можливі два випадки:

1) усі чотири двогранних кути є прямими (рис. 37.7, *а*);

2) із чотирьох двогранних кутів два рівних кути є гострими та два рівних кути є тупими (рис. 37.7, *б*).


а

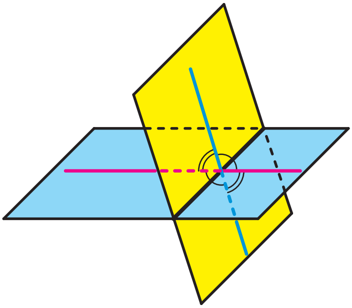

б

Рис. 37.7

В обох випадках із чотирьох двогранних кутів знайдеться такий, величина якого не більша за 90°.

Означення. Кутом між двома площинами, що перетинаються, називають величину того з утворених двогранних кутів, який не більший за 90°. Кут між двома паралельними площинами дорівнює 0°.

Кутом між многокутником і площиною, якій многокутник не належить, називають кут між площиною, що містить многокутник, і даною площиною.

Кутом між двома многокутниками, що лежать у різних площинах, називають кут між площинами, у яких лежать ці многокутники.

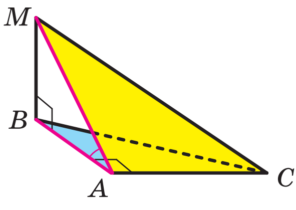


Рис. 37.8

Задача. Прямокутні трикутники ABC ($\angle A = 90°$) і ABM ($\angle B = 90°$) мають спільний катет AB (рис. 37.8). Відрізок MB перпендикулярний до площини ABC. Відомо, що $MB = 4$ см, $AC = 6$ см, $MC = 10$ см. Знайдіть кут між площинами ABC і AMC.

Розв'язання. Відрізок BA є проекцією похилої MA на площину ABC. Оскільки $BA \perp AC$, то за теоремою про три перпендикуляри $MA \perp AC$. Отже, кут MAB — лінійний кут двогранного кута з ребром AC, грані якого належать площинам ABC і AMC. Оскільки кут MAB гострий, то кут між площинами ABC і AMC дорівнює величині кута MAB.

Для сторони AM прямокутного трикутника AMC можна записати: $AM = \sqrt{MC^2 - AC^2}$. Звідси $AM = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

Для кута MAB прямокутного трикутника MAB можна записати: $\sin \angle MAB = \frac{MB}{MA}$. Звідси $\sin \angle MAB = \frac{1}{2}$ і $\angle MAB = 30°$.

Відповідь: 30°. ◄

Має місце теорема, яка встановлює зв'язок між площею даного многокутника та площею його проекції.

Теорема 37.1 (площа ортогональної проекції многокутника). ***Площа проекції опуклого многокутника дорівнює добутку його площі та косинуса кута α між многокутником і його проекцією, де $0° \leqslant \alpha < 90°$.***

Означення. **Дві площини називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.**

Якщо площини α і β перпендикулярні, то записують: $\alpha \perp \beta$. Також прийнято говорити, що площина α перпендикулярна до площини β або площина β перпендикулярна до площини α.

Наочне уявлення про перпендикулярні площини дають площини стіни та стелі кімнати, площини дверей та підлоги, площини сітки та тенісного корту (рис. 37.9).

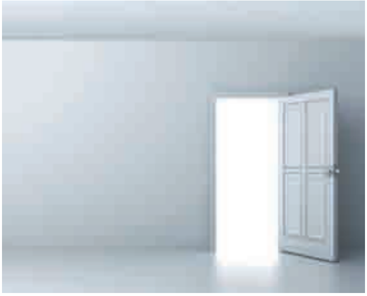


Рис. 37.9

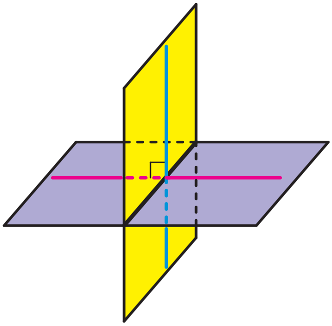


Рис. 37.10

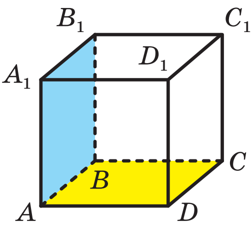


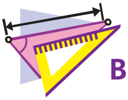
Рис. 37.11

Очевидно, що перпендикулярні площини в результаті перетину утворюють чотири прямих двогранних кути (рис. 37.10).

Теорема 37.2 (ознака перпендикулярності площин). ***Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.***

Наприклад, площина грані AA_1B_1B прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37.11) перпендикулярна до площини грані $ABCD$. Справді, площина AA_1B_1 проходить через пряму AA_1, перпендикулярну до площини ABC.

1. Яку фігуру називають лінійним кутом двогранного кута?
2. Що називають величиною двогранного кута?
3. Що називають кутом між двома площинами, які перетинаються?
4. Чому дорівнює кут між двома паралельними площинами?
5. Сформулюйте теорему про площу ортогональної проекції многокутника.
6. Які площини називають перпендикулярними?
7. Сформулюйте ознаку перпендикулярності площин.



ВПРАВИ

37.1.° Покажіть на предметах, що вас оточують, моделі двогранних кутів.

37.2.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 37.12).

1) Серед наведених кутів укажіть лінійний кут двогранного кута, грані якого належать площинам ABC і AB_1C_1:
а) $\angle A_1AB$; б) $\angle A_1AB_1$; в) $\angle B_1DA$; г) $\angle B_1AB$; ґ) $\angle B_1DB$.
2) Знайдіть величину вказаного двогранного кута.

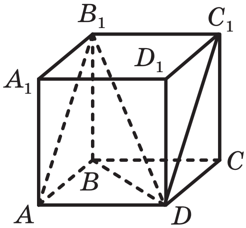


Рис. 37.12

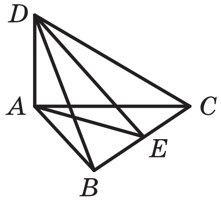


Рис. 37.13

37.3.° Відрізок AD — перпендикуляр до площини правильного трикутника ABC (рис. 37.13), точка E — середина сторони BC. Серед наведених кутів укажіть лінійний кут двогранного кута, грані якого належать площинам ABC і BCD:

1) $\angle ABD$; 2) $\angle AED$; 3) $\angle BAD$; 4) $\angle ACD$.

37.4.° На одній із граней двогранного кута, величина якого дорівнює 30°, позначили точку A (рис. 37.14). Відстань від точки A до ребра двогранного кута дорівнює 18 см. Чому дорівнює відстань від точки A до другої грані двогранного кута?

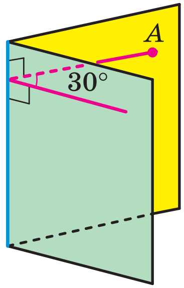


Рис. 37.14

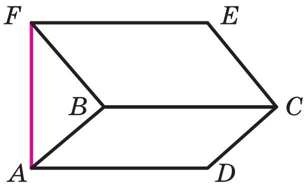


Рис. 37.15

37.5.° На одній із граней гострого двогранного кута позначено точку, відстань від якої до другої грані дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а до ребра двогранного кута — 8 см. Якою є величина даного двогранного кута?

37.6.° Прямокутники $ABCD$ і $BCEF$ лежать у різних площинах (рис. 37.15), причому пряма AF перпендикулярна до площини ABC. Знайдіть двогранний кут, грані якого містять дані прямокутники, якщо $AF = \sqrt{15}$ см, $CD = \sqrt{5}$ см.

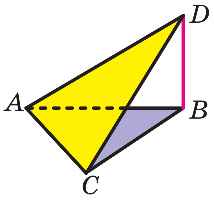


Рис. 37.16

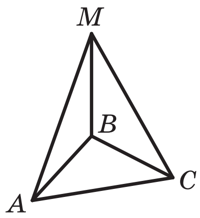


Рис. 37.17

37.7.° Трикутники ABC і ACD лежать у різних площинах (рис. 37.16), причому пряма BD перпендикулярна до площини ABC. Знайдіть двогранний кут, грані якого містять дані трикутники, якщо $\angle ACD = 90°$, $BC = 6$ см, $CD = 12$ см.

37.8.° Дано площину α і паралельну їй пряму a. Скільки площин можна провести через пряму a таких, щоб кут φ між площиною α і проведеною площиною задовольняв умову:
1) $\varphi = 90°$; 2) $\varphi = 0°$; 3) $0° < \varphi < 90°$?

37.9.° Відрізок MB — перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC (рис. 37.17). Знайдіть кут між площинами ABM і CBM.

37.10.° Відрізок CE — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ (рис. 37.18). Знайдіть кут між площинами BCE і DCE.

37.11.° Відрізок BK — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$ (рис. 37.19), $\angle ABC = 100°$. Знайдіть кут між площинами ABK і CBK.

37.12.° Знайдіть площу проекції многокутника на деяку площину, якщо площа многокутника дорівнює $18\sqrt{2}$ см^2, а кут між площиною многокутника та площиною проекції становить 45°.

37.13.° Знайдіть площу многокутника, якщо площа його проекції на деяку площину дорівнює 24 см^2, а кут між площиною многокутника та площиною проекції становить 30°.

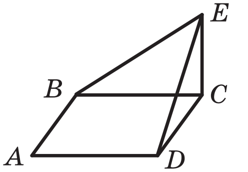


Рис. 37.18

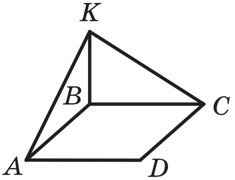


Рис. 37.19

37.14.° Покажіть на предметах, що вас оточують, моделі перпендикулярних площин.

37.15.° На рисунку 37.20 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначте, чи є перпендикулярними площини:

1) $A_1B_1C_1$ і CDD_1;
2) ABC і $A_1B_1C_1$;
3) AA_1C_1 і ABC;
4) ACC_1 і BDD_1.

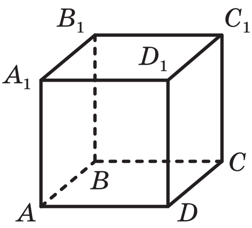


Рис. 37.20

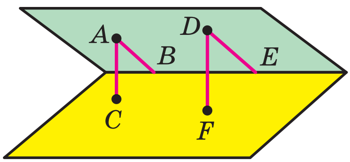


Рис. 37.21

37.16.• На одній грані гострого двогранного кута позначили точки A і D (рис. 37.21). Із точки A опустили перпендикуляри AB і AC відповідно на ребро та другу грань двогранного кута. Із точки D опустили перпендикуляри DE і DF відповідно на ребро та другу грань двогранного кута. Знайдіть відрізок DE, якщо $AB = 21$ см, $AC = 12$ см, $DF = 20$ см.

37.17.• На одній грані гострого двогранного кута позначили точки A і B, віддалені від другої його грані на 14 см і 8 см відповідно. Відстань від точки A до ребра двогранного кута дорівнює 42 см. Знайдіть відстань від точки B до ребра двогранного кута.

37.18.• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 18 см, а бічна сторона — 8 см. Знайдіть площу проекції даної трапеції на площину α, якщо кут між площиною трапеції та площиною α дорівнює 30°.

37.19.• Через одну зі сторін ромба, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 12 см, проведено площину α, що утворює з площиною ромба кут 30°. Знайдіть площу проекції даного ромба на площину α.

37.20.•• Точка B лежить усередині двогранного кута та віддалена від його граней на $\sqrt{2}$ см і $\sqrt{3}$ см, а від ребра — на 2 см. Знайдіть даний двогранний кут.

37.21.•• Точка C лежить усередині двогранного кута. Кут між перпендикулярами, опущеними з точки C на грані двогранного кута, дорівнює 110°. Знайдіть даний двогранний кут.

37.22.•• У гранях двогранного кута, який дорівнює 45°, проведено прямі, паралельні його ребру та віддалені від ребра на $2\sqrt{2}$ см і 3 см відповідно. Знайдіть відстань між даними паралельними прямими.

37.23.•• Площина α перетинає грані двогранного кута по паралельних прямих m і n. Відстань від ребра двогранного кута до прямої m дорівнює 3 см, до прямої n — 5 см, а відстань між прямими m і n — 7 см. Знайдіть даний двогранний кут.

37.24.•• Площини прямокутників $ABCD$ і $CBFE$ перпендикулярні (рис. 37.22). Знайдіть відстань від точки E до прямої AD і відстань від точки D до прямої BF, якщо $AB = BF = 5$ см, $BC = 12$ см.

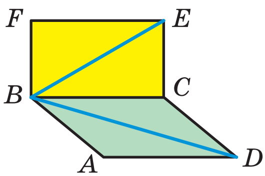


Рис. 37.22

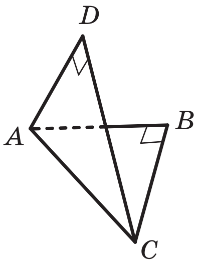


Рис. 37.23

37.25.•• Площини правильних трикутників ABC і ADC перпендикулярні. Знайдіть кут між прямою BD і площиною ABC.

37.26.•• Рівнобедрені прямокутні трикутники ABC і ADC мають спільну гіпотенузу AC завдовжки 6 см, а їхні площини перпендикулярні (рис. 37.23). Знайдіть відстань між точками B і D.

37.27.•• Кінці відрізка належать двом перпендикулярним площинам, а відстані від кінців відрізка до лінії перетину площин дорівнюють 15 см і 16 см. Відстань між основами перпендикулярів, проведених із кінців відрізка до лінії перетину цих площин, дорівнює 12 см. Знайдіть даний відрізок.

37.28.•• Точки A і B лежать у перпендикулярних площинах α і β відповідно. Із точок A і B опустили перпендикуляри AC і BD на лінію перетину площин α і β. Знайдіть відстань від точки B до лінії перетину площин α і β, якщо відстань від точки A до цієї лінії дорівнює 9 см, $AB = 17$ см, $CD = 12$ см.

37.29.•• Площини α і β перпендикулярні. Точка A лежить у площині α, точка B — у площині β. Точка A віддалена від лінії перетину площин α і β на 5 см, а точка B — на $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть кут між прямою AB і площиною α, якщо кут між прямою AB і площиною β дорівнює $30°$.

37.30.•• Кінці відрізка завдовжки 6 см належать двом перпендикулярним площинам, а відстані від кінців відрізка до лінії перетину площин дорівнюють 3 см і $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть кути, які утворює цей відрізок з даними площинами.

37.31.•• Площини трапецій $ABCD$ і $AEFD$ зі спільною основою AD перпендикулярні, $\angle BAD = \angle EAD = 90°$, $\angle ADC = \angle ADF = 60°$, $CD = 4$ см, $DF = 8$ см. Знайдіть відстань між: 1) прямими BC і EF; 2) точками C і F.

37.32.•• Площини квадрата $ABCD$ і прямокутника $AEFD$ перпендикулярні. Знайдіть відстань між прямими BC і EF, якщо площа квадрата дорівнює 25 см^2, а площа прямокутника — 60 см^2.

37.33.•• Ребро DA тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 37.24), $AB = BC = AC = 8$ см, $BD = 4\sqrt{7}$ см. Знайдіть двогранний кут, грані якого містять трикутники ABC і BCD.

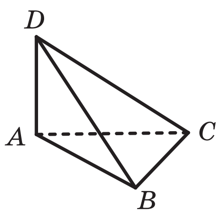


Рис. 37.24

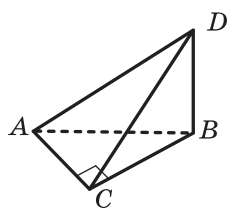


Рис. 37.25

37.34.•• Ребро DB тетраедра $DABC$ перпендикулярне до площини ABC (рис. 37.25), $\angle ACB = 90°$, $AC = BC = 7$ см, $AD = 7\sqrt{5}$ см. Знайдіть двогранний кут, грані якого містять трикутники ABC і ACD.

37.35.* Точка M — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між площинами BMD і A_1BD.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

37.36. Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 25 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 16 см. Знайдіть третю сторону трикутника.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 5

Кут між прямими в просторі

Кутом між двома прямими, що перетинаються, називають величину того з кутів, утворених при їхньому перетині, який не більший за 90°.

Вважають, що кут між двома паралельними прямими дорівнює 0°.

Кутом між двома мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються та відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

Дві прямі в просторі називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Перпендикулярність прямої та площини

Пряму називають перпендикулярною до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що лежать у площині та перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.

Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то й друга пряма перпендикулярна до цієї площини.

Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні.

Через дану точку можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини, і до того ж тільки одну.

Ортогональна проекція фігури

Нехай фігура F_1 — паралельна проекція фігури F на площину α в напрямі прямої l. Якщо $l \perp \alpha$, то фігуру F_1 називають ортогональною проекцією фігури F на площину α.

Відстань від точки до площини

Якщо точка не належить площині, то відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, опущеного з точки на площину. Якщо точка належить площині, то вважають, що відстань від точки до площини дорівнює нулю.

Відстань від прямої до паралельної їй площини

Відстанню від прямої до паралельної їй площини називають відстань від будь-якої точки цієї прямої до площини.

Відстань між двома паралельними площинами

Відстанню між двома паралельними площинами називають відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

Теорема про три перпендикуляри

Якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до проекції похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до самої похилої. І навпаки, якщо пряма, яка належить площині, перпендикулярна до похилої до цієї площини, то вона перпендикулярна й до проекції похилої на цю площину.

Кут між прямою та площиною

Якщо пряма паралельна площині або належить їй, то вважають, що кут між такою прямою та площиною дорівнює $0°$.

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то вважають, що кут між такою прямою та площиною дорівнює $90°$.

Якщо пряма перетинає площину й не перпендикулярна до неї, то кутом між такою прямою та площиною називають кут між прямою та її проекцією на площину.

Величина двогранного кута

Величиною двогранного кута називають величину його лінійного кута.

Кут між двома площинами, що перетинаються

Кутом між двома площинами, що перетинаються, називають величину того з утворених двогранних кутів, який не більший за $90°$.

Площа ортогональної проекції многокутника

Площа проекції опуклого многокутника дорівнює добутку його площі та косинуса кута α між многокутником і його проекцією, де $0° \leqslant \alpha < 90°$.

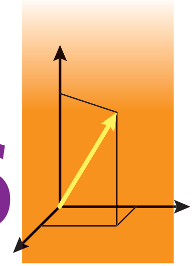
Перпендикулярні площини

Дві площини називають перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює $90°$.

Ознака перпендикулярності площин

Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ §6



У цьому параграфі ви ознайомитеся з прямокутною системою координат у просторі, навчитеся знаходити координати точок у просторі, довжину відрізка та координати його середини.

Ви узагальните й розширите свої знання про вектори.

38. Декартові координати точки в просторі

У попередніх класах ви ознайомилися з прямокутною (декартовою) системою координат на площині — це дві перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку (рис. 38.1).

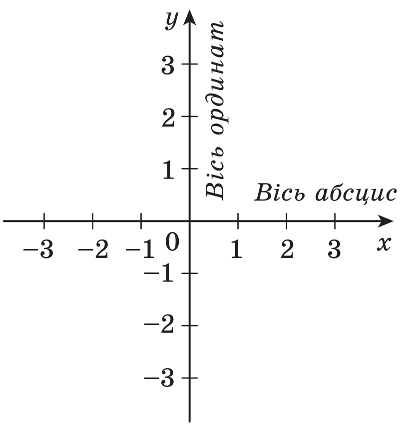


Рис. 38.1

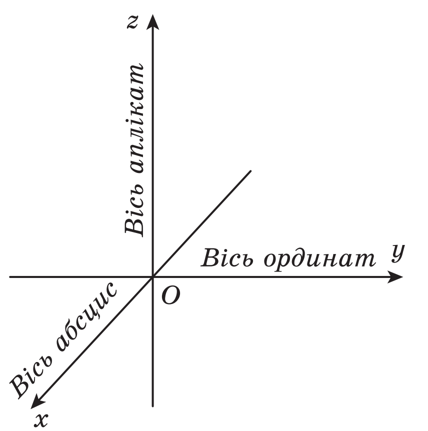


Рис. 38.2

Систему координат можна ввести й у просторі.

Прямокутною (декартовою) системою координат у просторі називають три попарно перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку (рис. 38.2). Точку, у якій перетинаються три координатні прямі, позначають буквою O. Її називають **початком координат**. Координатні прямі позначають буквами x, y і z, їх відповідно називають **віссю абсцис**, **віссю ординат** і **віссю аплікат**.

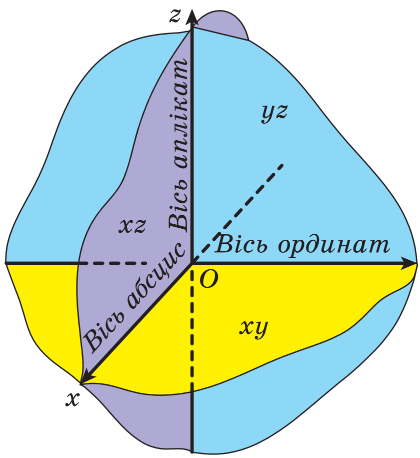


Рис. 38.3

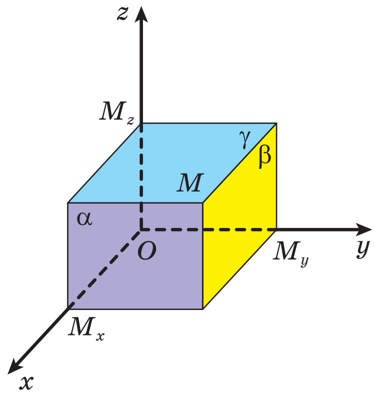


Рис. 38.4

Площини, які проходять через пари координатних прямих x і y, x і z, y і z, називають **координатними площинами**, їх відповідно позначають xy, xz, yz (рис. 38.3).

Простір, у якому задано систему координат, називають **координатним простором**. Якщо осі координат позначено буквами x, y, z, то координатний простір позначають xyz.

Із курсу планіметрії ви знаєте, що кожній точці M координатної площини xy ставиться у відповідність упорядкована пара чисел $(x; y)$, які називають координатами точки M. Записують: $M\ (x; y)$.

Аналогічно кожній точці M координатного простору ставиться у відповідність упорядкована трійка чисел $(x; y; z)$, яку визначають таким чином. Проведемо через точку M три площини α, β і γ перпендикулярно до осей x, y і z відповідно. Точки перетину цих площин з координатними осями позначимо M_x, M_y і M_z (рис. 38.4). Координату точки M_x на осі x називають **абсцисою** точки M і позначають буквою x. Координату точки M_y на осі y називають **ординатою** точки M і позначають буквою y. Координату точки M_z на осі z називають **аплікатою** точки M і позначають буквою z.

Отриману таким чином упорядковану трійку чисел $(x; y; z)$ називають **координатами точки** M у просторі. Записують: $M\ (x; y; z)$.

Якщо точка M має координати $M\ (x; y; z)$, то числа $|x|$, $|y|$, $|z|$ дорівнюють відстаням від точки M до координатних площин yz, xz, xy. Використовуючи цей факт, можна довести, що, наприклад,

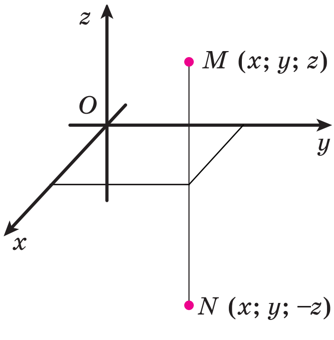


Рис. 38.5

точки з координатами $M(x; y; z)$ і $N(x; y; -z)$ лежать на прямій, перпендикулярній до площини xy, і рівновіддалені від цієї площини (рис. 38.5). У такому випадку говорять, що точки M і N є **симетричними відносно площини xy**.

Якщо точка належить координатній площині або координатній осі, то деякі її координати дорівнюють нулю. Наприклад, точка $A(x; y; 0)$ належить координатній площині xy, а точка $B(0; 0; z)$ — осі аплікат.

Справедливими є такі твердження.

Теорема 38.1. ***Відстань між двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ можна знайти за формулою***

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Теорема 38.2. ***Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців, тобто серединою відрізка з кінцями в точках $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ є точка***

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

Доведення теорем 38.1 і 38.2 аналогічні тому, як були доведені відповідні теореми в курсі планіметрії.

Наприклад, серединою відрізка з кінцями в точках $A(x; y; z)$ і $B(-x; -y; -z)$ є початок координат — точка $O(0; 0; 0)$. У такому випадку говорять, що точки A і B є **симетричними відносно початку координат**.

1. Як називають три попарно перпендикулярні координатні прямі зі спільним початком відліку?
2. Як називають координатну пряму, позначену буквою x? буквою y? буквою z?
3. Опишіть, яким чином кожній точці M координатного простору ставиться у відповідність упорядкована трійка чисел $(x; y; z)$.
4. У якому випадку говорять, що дві точки симетричні відносно координатної площини xy? площини xz? площини yz?
5. Як знайти відстань між двома точками, якщо відомо їхні координати?

6. Як знайти координати середини відрізка, якщо відомо координати його кінців?

7. У якому випадку говорять, що дві точки симетричні відносно початку координат?

ВПРАВИ

38.1.° Визначте, чи лежить дана точка на координатній осі, і в разі ствердної відповіді вкажіть цю вісь:

1) $A\ (4;\ -3;\ 0)$; 3) $C\ (-6;\ 0;\ 0)$; 5) $E\ (0;\ 0;\ -2)$;
2) $B\ (1;\ 0;\ -5)$; 4) $D\ (0;\ 7;\ 0)$; 6) $F\ (3;\ 0;\ 0)$.

38.2.° Визначте, чи належить дана точка координатній площині, і в разі ствердної відповіді вкажіть цю площину:

1) $A\ (4;\ -3;\ 5)$; 3) $C\ (3;\ 3;\ 0)$; 5) $E\ (0;\ 4;\ 0)$;
2) $B\ (0;\ -2;\ 6)$; 4) $D\ (2;\ 0;\ 8)$; 6) $F\ (-1;\ 1;\ 2)$.

38.3.° Якою є відстань від точки $M\ (4;\ -5;\ 2)$ до координатної площини:

1) xy; 2) xz; 3) yz?

38.4.° Які координати має проекція точки $M\ (-3;\ 2;\ 4)$ на координатну площину:

1) xz; 2) yz; 3) xy?

38.5.° Знайдіть відстань між точками A і B, якщо:

1) $A\ (3;\ -4;\ 2)$, $B\ (5;\ -6;\ 1)$; 2) $A\ (-2;\ 3;\ 1)$, $B\ (-3;\ 2;\ 0)$.

38.6.° Знайдіть відстань між точками $C\ (6;\ -5;\ -1)$ і $D\ (8;\ -7;\ 1)$.

38.7.° Знайдіть координати середини відрізка CD, якщо $C\ (-2;\ 6;\ -7)$, $D\ (4;\ -10;\ -3)$.

38.8.° Знайдіть координати середини відрізка EF, якщо $E\ (3;\ -3;\ 10)$, $F\ (1;\ -4;\ -8)$.

38.9.• Які з точок $A\ (-1;\ 6;\ 2)$, $B\ (-1;\ -6;\ 2)$, $C\ (1;\ 6;\ -2)$, $D\ (1;\ -6;\ 2)$ лежать в одній площині, паралельній площині xz?

38.10.• Які з точок $M\ (5;\ 10;\ -3)$, $N\ (5;\ 9;\ 3)$, $K\ (4;\ -9;\ 3)$, $P\ (4;\ -9;\ 2)$ лежать в одній площині, паралельній площині xy?

38.11.• Які координати має точка, симетрична точці $M\ (1;\ -5;\ 2)$ відносно площини:

1) xz; 2) yz; 3) xy?

38.12.• Які координати має точка, симетрична точці $N\ (-7;\ 1;\ 0)$ відносно початку координат?

38.13.• Які з точок $A\ (5;\ -8;\ 1)$, $B\ (5;\ 8;\ 1)$, $C\ (-5;\ 7;\ 1)$, $D\ (5;\ -7;\ -1)$ лежать на одній прямій, паралельній осі ординат?

38.14.$^{\bullet}$ Які з точок D (2; 3; 4), E (−2; 3; 4), K (2; 3; −4), M (−2; −3; 4) лежать на одній прямій, паралельній осі аплікат?

38.15.$^{\bullet}$ Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розміщено в прямокутній системі координат так, як показано на рисунку 38.6. Точка A має координати (1; −1; 0). Знайдіть координати решти вершин куба.

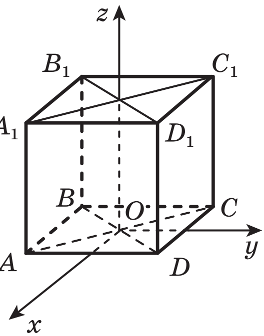


Рис. 38.6

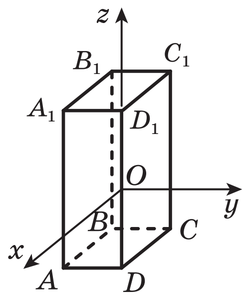


Рис. 38.7

38.16.$^{\bullet}$ Бічні ребра прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралельні осі аплікат (рис. 38.7), $AD = 3$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$. Початок координат, точка O, є серединою ребра DD_1. Знайдіть координати вершин паралелепіпеда.

38.17.$^{\bullet}$ Точки A (3; −2; 6) і C (−1; 2; −4) є вершинами квадрата $ABCD$. Знайдіть площу цього квадрата.

38.18.$^{\bullet}$ Точки A (5; −5; 4) і B (8; −3; 3) є вершинами рівностороннього трикутника ABC. Знайдіть периметр цього трикутника.

38.19.$^{\bullet}$ Точка S — середина відрізка AD, A (−1; −2; −3), S (5; −1; 0). Знайдіть координати точки D.

38.20.$^{\bullet}$ Відстань між точками A (1; y; 3) і B (3; −6; 5) дорівнює $2\sqrt{6}$. Знайдіть значення y.

38.21.$^{\bullet}$ Точка A належить осі абсцис. Відстань від точки A до точки C (1; −1; −2) дорівнює 3. Знайдіть координати точки A.

38.22.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть відстань від точки M (−3; 4; 9) до осі аплікат.

38.23.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть відстань від точки K (12; 10; −5) до осі ординат.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

38.24. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 13 см і 37 см, а її діагоналі перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції.

39. Вектори в просторі

У курсі планіметрії ви вивчали вектори на площині. Тепер ви починаєте вивчати вектори в просторі. Багато понять і властивостей, пов'язаних з векторами на площині, можна майже дослівно віднести до векторів у просторі. Доведення такого роду тверджень про вектори в просторі цілком аналогічні доведенням відповідних тверджень про вектори на площині.

Розглянемо відрізок AB. Якщо ми домовимося точку A вважати **початком** відрізка, а точку B — його **кінцем**, то такий відрізок буде характеризуватися не тільки довжиною, але й напрямом від точки A до точки B. Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають **напрямленим відрізком** або **вектором**.

Вектор з початком у точці A й кінцем у точці B позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (читають: «вектор AB»). Для позначення векторів також використовують малі букви латинського алфавіту зі стрілкою зверху.

На рисунку 39.1 зображено вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$ і $\vec{p}$.

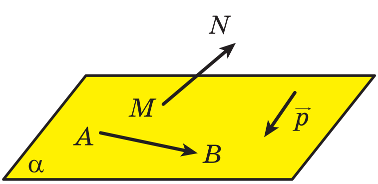


Рис. 39.1

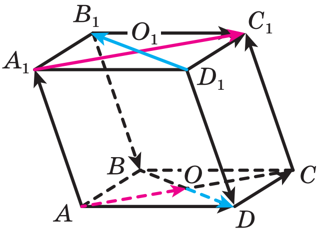


Рис. 39.2

На відміну від відрізка, у якого кінці — різні точки, у вектора початок і кінець можуть збігатися.

Домовились називати вектор, у якого початок і кінець — одна й та сама точка, **нульовим вектором** або **нуль-вектором** і позначати $\vec{0}$.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Позначають: $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора $\vec{a}$ позначають так: $|\vec{a}|$. Вважають, що модуль нульового вектора дорівнює нулю. Записують: $|\vec{0}| = 0$.

Означення. Два ненульових вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

На рисунку 39.2 зображено чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$ є колінеарними. Записують: $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$.

Ненульові колінеарні вектори бувають **співнапрямленими** й **протилежно напрямленими.** Наприклад, на рисунку 39.2 вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$ співнапрямлені. Записують: $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1C_1}$. Вектори $\overrightarrow{OD}$ і $\overrightarrow{D_1B_1}$ протилежно напрямлені. Записують: $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1B_1}$.

Означення. Два ненульових вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульових вектори рівні.

На рисунку 39.2 $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$, $\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1C_1}$.

Часто, говорячи про вектори, ми не конкретизуємо, яка точка є початком вектора. Так, на рисунку 39.3, *а* зображено вектор $\vec{a}$. На рисунку 39.3, *б* зображено вектори, рівні вектору $\vec{a}$. Кожний із них також прийнято називати вектором $\vec{a}$.

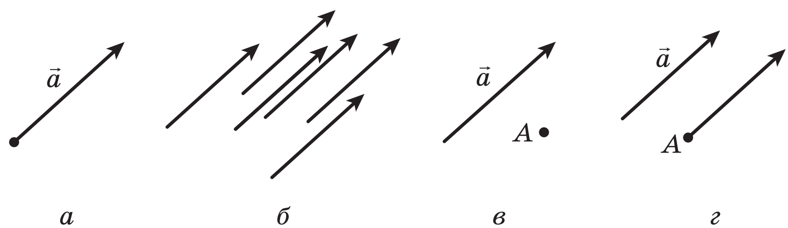


Рис. 39.3

На рисунку 39.3, *в* зображено вектор $\vec{a}$ і точку A. Побудуємо вектор $\overrightarrow{AB}$, який дорівнює вектору $\vec{a}$. У такому разі говорять, що вектор $\vec{a}$ **відкладено від точки** A (рис. 39.3, *г*).

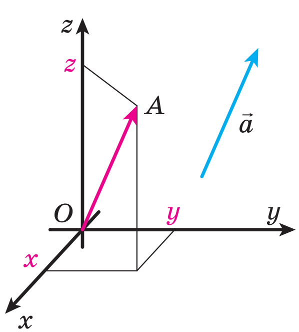


Рис. 39.4

Розглянемо в координатному просторі вектор $\vec{a}$. Від початку координат відкладемо вектор $\overrightarrow{OA}$, рівний вектору $\vec{a}$ (рис. 39.4). **Координатами вектора** $\vec{a}$ називають координати точки A. Запис $\vec{a}\,(x;\, y;\, z)$ означає, що вектор $\vec{a}$ має координати $(x;\, y;\, z)$.

Рівні вектори мають рівні відповідні координати, і навпаки, якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.

Теорема 39.1. ***Якщо точки*** $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ ***і*** $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ — ***відповідно початок і кінець вектора*** $\vec{a}$, ***то числа*** $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ ***і*** $z_2 - z_1$ ***дорівнюють відповідно першій, другій і третій координатам вектора*** $\vec{a}$.

Із формули відстані між двома точками випливає, що ***коли вектор*** $\vec{a}$ ***має координати*** $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, ***то***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

1. Як позначають вектор з початком у точці A й кінцем у точці B?
2. Який вектор називають нульовим?
3. Що називають модулем вектора?
4. Які вектори називають колінеарними?
5. Які два ненульових вектори називають рівними?
6. Що можна сказати про координати рівних векторів?
7. Що можна сказати про вектори, відповідні координати яких рівні?
8. Як знайти координати вектора, якщо відомо координати його початку й кінця?
9. Як знайти модуль вектора, якщо відомо його координати?

ВПРАВИ

39.1.° На рисунку 39.5 зображено призму $ABCA_1B_1C_1$, основою якої є правильний трикутник. Чи є рівними вектори:

1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$;
3) $\overrightarrow{BB_1}$ і $\overrightarrow{C_1C}$;
4) $\overrightarrow{BB_1}$ і $\overrightarrow{AA_1}$?

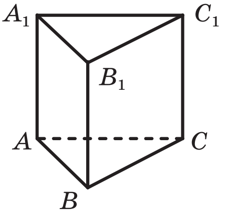


Рис. 39.5

39.2.° Точки E і F — середини відповідно ребер AA_1 і AD прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 39.6), $AB \neq AD$. Укажіть вектори з початком і кінцем у вершинах паралелепіпеда, які:

1) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{EF}$;
2) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{AB_1}$;
3) мають рівні модулі з вектором $\overrightarrow{BC_1}$.

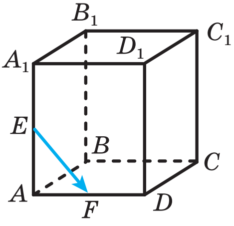


Рис. 39.6

39.3.° Точки M і K — середини відповідно ребер CD і CC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть вектори з початком і кінцем у вершинах паралелепіпеда, які:

1) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{AD}$;

2) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{MK}$;

3) мають рівні модулі з вектором $\overrightarrow{AC_1}$.

39.4.° Накресліть тетраедр $DABC$. Відкладіть:

1) від точки A вектор, рівний вектору $\overrightarrow{CA}$;

2) від точки B вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AC}$;

3) від точки D вектор, рівний вектору $\overrightarrow{BC}$.

39.5.° Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Відкладіть:

1) від точки A вектор, рівний вектору $\overrightarrow{A_1A}$;

2) від точки C вектор, рівний вектору $\overrightarrow{A_1C_1}$;

3) від точки D_1 вектор, рівний вектору $\overrightarrow{B_1D}$.

39.6.° Які координати має нульовий вектор?

39.7.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

1) A (3; 4; 2), B (1; −4; 5); 2) A (−6; 7; −1), B (2; 9; 8).

39.8.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{CD}$, якщо C (−1; 10; 4), D (−1; 0; 2).

39.9.° Знайдіть модуль вектора $\vec{m}\left(2; -5; \sqrt{7}\right)$.

39.10.° Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{MK}$, якщо M (10; −4; 20), K (8; −2; 19).

39.11.• Знайдіть координати кінця вектора $\overrightarrow{PF}$ (2; −3; 6), якщо P (3; 5; −1).

39.12.• Знайдіть координати початку вектора $\overrightarrow{ST}$ (−3; 4; −2), якщо T (4; 2; 0).

39.13.• Дано точки A (−2; 3; 5), B (1; 2; 4), C (4; −3; 6). Знайдіть координати точки D такої, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

39.14.• Дано точки A (5; −12; 7), B (0; y; 3), C (x; 17; −14), D (15; 0; z). При яких значеннях x, y і z є правильною рівність $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

39.15.• Модуль вектора $\vec{a}$ (−4; y; 12) дорівнює 13. Знайдіть значення y.

39.16.° При яких значеннях k вектори $\vec{a}\,(4;\ k+3;\ 10)$ і $\vec{b}\,(k;\ 4;\ k+9)$ мають рівні модулі?

39.17.•• Використовуючи вектори, доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A\,(-4;\ 2;\ 5)$, $B\,(-6;\ 3;\ 0)$, $C\,(12;\ -8;\ 1)$ і $D\,(14;\ -9;\ 6)$ є паралелограмом.

39.18.•• Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A\,(10;\ -8;\ -1)$, $C\,(-2;\ 4;\ 4)$ і $D\,(11;\ -20;\ 10)$. Використовуючи вектори, знайдіть координати вершини B.

39.19.•• Модуль вектора $\vec{m}$ дорівнює $4\sqrt{3}$, а його координати є рівними. Знайдіть координати вектора $\vec{m}$.

39.20.•• Модуль вектора $\vec{c}\,(x;\ y;\ z)$ дорівнює 9, його координати x і z є рівними, а координати x і y — протилежні числа. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

39.21. По один бік від центра кола проведено дві паралельні хорди завдовжки 30 см і 48 см. Знайдіть відстань між хордами, якщо радіус кола дорівнює 25 см.

40. Додавання і віднімання векторів

Нехай у просторі дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Відкладемо від довільної точки A простору вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$. Далі від точки B відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ називають **сумою векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 40.1) і записують: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Описаний алгоритм додавання двох векторів називають **правилом трикутника**.

Можна показати, що сума $\vec{a}+\vec{b}$ не залежить від вибору точки A.

Зазначимо, що *для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Вона виражає правило трикутника.

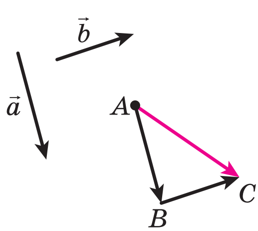


Рис. 40.1

Властивості додавання векторів аналогічні властивостям додавання чисел.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ ***(переставна властивість);***

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ ***(сполучна властивість).***

Суму трьох і більшої кількості векторів знаходять так: спочатку додають перший і другий вектори, потім до отриманої суми додають третій вектор і т. д. Наприклад, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Для тетраедра $DABC$, зображеного на рисунку 40.2, можна записати: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$.

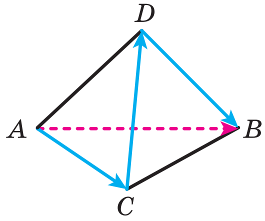


Рис. 40.2

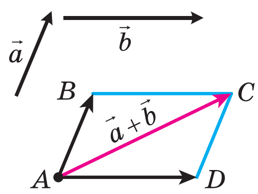


Рис. 40.3

Для додавання двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зручно користуватися **правилом паралелограма.**

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{AD}$, рівний вектору $\vec{b}$ (рис. 40.3). Побудуємо паралелограм $ABCD$. Тоді шукана сума $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{AC}$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, які не лежать в одній площині (рис. 40.4). Знайдемо суму цих векторів.

Побудуємо паралелепіпед так, щоб відрізки OA, OB і OC були його ребрами (рис. 40.5). Відрізок OD є діагоналлю цього паралелепіпеда. Доведемо, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

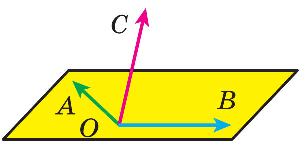


Рис. 40.4

Оскільки чотирикутник $OBKA$ — паралелограм, то $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OK}$. Маємо: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}$. Оскільки чотирикутник $OCDK$ — паралелограм, то $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$.

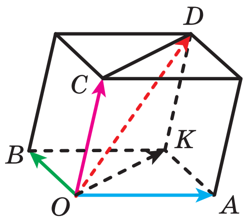


Рис. 40.5

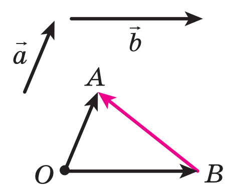


Рис. 40.6

Описаний спосіб додавання трьох векторів, які відкладені від однієї точки та не лежать в одній площині, називають **правилом паралелепіпеда**.

Означення. Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Записують: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Покажемо, як побудувати вектор, що дорівнює різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 40.6). Тоді $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. За означенням різниці двох векторів $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$, отже, вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Зазначимо, що *для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність* $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. Вона виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки.

Теорема 40.1. ***Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнюють відповідно $(a_1; a_2; a_3)$ і $(b_1; b_2; b_3)$, то координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$, а координати вектора $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.***

1. Опишіть правило трикутника для знаходження суми векторів.
2. Опишіть правило паралелограма для знаходження суми двох векторів.
3. Опишіть правило паралелепіпеда для знаходження суми трьох векторів.
4. Який вектор називають різницею двох векторів?
5. Чому дорівнюють координати вектора, рівного сумі двох даних векторів?
6. Чому дорівнюють координати вектора, рівного різниці двох даних векторів?

ВПРАВИ

40.1.° Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 40.7). Знайдіть суму векторів:
1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AA_1}$; 2) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A_1C_1}$.

40.2.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть суму векторів:
1) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{DD_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C_1D_1}$.

40.3.° Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 40.8). Знайдіть суму $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{B_1C_1}$.

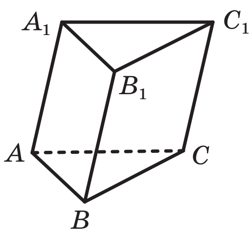


Рис. 40.7

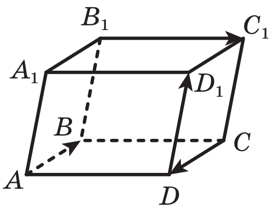


Рис. 40.8

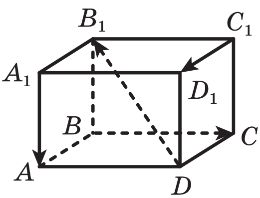


Рис. 40.9

40.4.° Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 40.9). Знайдіть суму $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{BC}$.

40.5.° Дано вектори $\vec{a}\,(3; -6; 4)$ і $\vec{b}\,(-2; 4; -5)$. Знайдіть:
1) координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}|$.

40.6.° Дано вектори $\vec{m}\,(-7; -1; 8)$ і $\vec{n}\,(-3; 2; -4)$. Знайдіть:
1) координати вектора $\vec{m}+\vec{n}$; 2) $|\vec{m}+\vec{n}|$.

40.7.° Дано вектори $\vec{a}\,(-10; 15; -20)$ і $\vec{b}\,(2; 6; -12)$. Знайдіть:
1) координати вектора $\vec{a}-\vec{b}$; 2) $|\vec{a}-\vec{b}|$.

40.8.° Дано вектори $\vec{m}\,(3; -1; 2)$ і $\vec{n}\,(4; -2; -3)$. Знайдіть:
1) координати вектора $\vec{m}-\vec{n}$; 2) $|\vec{m}-\vec{n}|$.

40.9.° Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 40.7). Знайдіть різницю векторів:
1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{BC_1}$; 3) $\overrightarrow{BA_1}-\overrightarrow{B_1C_1}$.

40.10.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть різницю векторів:
1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC_1}$; 2) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DD_1}$.

40.11.$^{\bullet}$ Спростіть вираз $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NK}$.

40.12.$^{\bullet}$ Спростіть вираз $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BM}$.

40.13.$^{\bullet\bullet}$ Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть вектор, що дорівнює $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\overrightarrow{C_1D_1}$.

40.14.$^{\bullet\bullet}$ Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть вектор, що дорівнює $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{DC_1}+\overrightarrow{BC}$.

40.15.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть координати точки A такої, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, якщо B (4; −2; 12), C (3; −1; 4).

40.16.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть координати точки M такої, що $\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, якщо C (1; −5; 3), D (−2; 0; 6).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

40.17. Хорди AB і AC кола перпендикулярні, AB = 12 см, AC = 16 см. Знайдіть відстань від точки A до прямої BC.

41. Множення вектора на число

Означення. Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $|\vec{b}|=|k||\vec{a}|$;

2) якщо $k>0$, то $\vec{b}\uparrow\uparrow\vec{a}$; якщо $k<0$, то $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$.

Записують: $\vec{b}=k\vec{a}$.

Якщо $\vec{a}=\vec{0}$ або $k=0$, то вважають, що $k\vec{a}=\vec{0}$.

На рисунку 41.1 зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Маємо: $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{O_1C_1}$, $\overrightarrow{B_1O_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{A_1C_1}=-2\overrightarrow{OA}$.

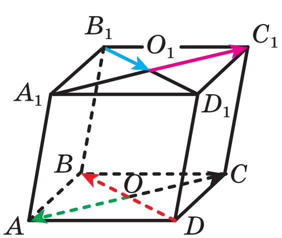


Рис. 41.1

З означення випливає, що

$$1\cdot\vec{a}=\vec{a}.$$

Теорема 41.1. ***Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}$.***

Ця теорема дає змогу звести віднімання векторів до додавання: щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, можна до вектора $\vec{a}$ додати вектор $(-1)\cdot\vec{b}$.

Добуток $-1\cdot\vec{a}$ позначають $-\vec{a}$ і називають вектором, **протилежним** вектору $\vec{a}$. Наприклад, записують:

$$\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right).$$

З означення множення вектора на число випливає, що *коли* $\vec{b}=k\vec{a}$, *то вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *колінеарні*.

Отже, *з рівності* $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$ *отримуємо, що точки O, A і B лежать на одній прямій*.

Теорема 41.2. ***Якщо вектори*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***колінеарні й*** $\vec{a}\neq\vec{0}$, ***то існує таке число k, що*** $\vec{b}=k\vec{a}$.

Теорема 41.3. ***Якщо координати вектора*** $\vec{a}$ ***дорівнюють*** $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, ***то координати вектора*** $k\vec{a}$ ***дорівнюють*** $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$.

Множення вектора на число має такі властивості.

Для будь-яких чисел k, m і для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ ***виконуються рівності:***

$(km)\vec{a}=k\left(m\vec{a}\right)$ (***сполучна властивість***);

$(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ (***перша розподільна властивість***);

$k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ (***друга розподільна властивість***).

Ці властивості дають змогу перетворювати вирази, які містять суму векторів, їхню різницю та добуток вектора на число, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази. Наприклад, $2\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)+3\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}-6\vec{b}+3\vec{a}+3\vec{b}=5\vec{a}-3\vec{b}$.

?

1. Що називають добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля?
2. Який вектор називають протилежним даному вектору?
3. Що можна сказати про вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{b}=k\vec{a}$, де k – деяке число?
4. Відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому $\vec{a}\neq\vec{0}$. Як можна виразити вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?
5. Вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1;\ a_2;\ a_3)$. Чому дорівнюють координати вектора $k\vec{a}$?

6. Що можна сказати про вектори, координати яких дорівнюють $(a_1; a_2; a_3)$ і $(ka_1; ka_2; ka_3)$?

7. Запишіть сполучну та розподільні властивості множення вектора на число.

ВПРАВИ

41.1.° Модуль вектора $\vec{m}$ дорівнює 4. Чому дорівнює модуль вектора $\vec{n}$, якщо:

1) $\vec{n} = 3\vec{m}$; 2) $\vec{n} = -5\vec{m}$?

41.2.° Якими векторами — співнапрямленими або протилежно напрямленими — є ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -2\vec{b}$?

41.3.° Дано вектор $\vec{a}\,(4; -8; -20)$. Якими є координати вектора $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{b} = 5\vec{a}$; 2) $\vec{b} = -\frac{3}{4}\vec{a}$?

41.4.° Дано вектори $\vec{a}\,(-3; 2; 5)$ і $\vec{b}\,(-2; -4; 1)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо:

1) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

41.5.° Дано вектори $\vec{m}\,(1; 7; -8)$ і $\vec{n}\,(3; -1; 6)$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо:

1) $\vec{a} = -2\vec{m} + 5\vec{n}$; 2) $\vec{a} = -\vec{m} - 6\vec{n}$.

41.6.° Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 41.2). Укажіть усі вектори, початком і кінцем кожного з яких є вершини паралелепіпеда, протилежні вектору:

1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{B_1D}$; 3) $\overrightarrow{AC}$.

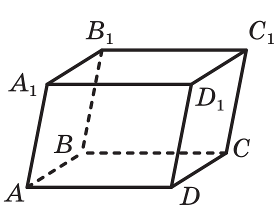


Рис. 41.2

41.7.° Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 41.2). Укажіть усі вектори, початком і кінцем кожного з яких є вершини паралелепіпеда, протилежні вектору:

1) $\overrightarrow{B_1B}$; 2) $\overrightarrow{CD_1}$.

41.8.° Якими є координати вектора, протилежного вектору $\vec{a}\,(13; -10; 9)$?

41.9.$^{\bullet}$ Знайдіть модуль вектора $\vec{c} = -6\vec{a} - 7\vec{b}$, якщо $\vec{a}\,(-1;\ 1;\ 1)$, $\vec{b}\,(2;\ 2;\ -2)$.

41.10.$^{\bullet}$ Знайдіть модуль вектора $\vec{p} = 8\vec{a} - 9\vec{b}$, якщо $\vec{a}\,(0{,}5;\ -0{,}5;\ 1{,}5)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{9}\right)$.

41.11.$^{\bullet}$ Чи є колінеарними вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A\,(4;\ -1;\ -4)$, $B\,(0;\ 5;\ 6)$, $C\,(0;\ 2;\ 7)$, $D\,(2;\ -1;\ 2)$?

41.12.$^{\bullet}$ Чи є колінеарними вектори $\overrightarrow{DE}$ і $\overrightarrow{FK}$, якщо $D\,(2;\ -3;\ 4)$, $E\,(-1;\ 6;\ 2)$, $F\,(-2;\ 8;\ 6)$, $K\,(-3;\ 11;\ 7)$?

41.13.$^{\bullet}$ Знайдіть значення x і y, при яких вектори $\vec{a}\,(x;\ y;\ 2)$ і $\vec{b}\,(-2;\ 3;\ 1)$ будуть колінеарними.

41.14.$^{\bullet}$ Знайдіть значення x і z, при яких вектори $\vec{m}\,(-1;\ 7;\ z)$ і $\vec{n}\,(x;\ 4;\ 5)$ будуть колінеарними.

41.15.$^{\bullet\bullet}$ Дано вектор $\vec{a}\,(3;\ 2;\ 1)$. Знайдіть колінеарний йому вектор $\overrightarrow{AB}$, якщо $A\,(1;\ 1;\ 1)$, а точка B належить площині yz.

41.16.$^{\bullet\bullet}$ Дано точки $A\,(-3;\ 6;\ 4)$, $B\,(6;\ -1;\ 2)$, $C\,(0;\ 3;\ -2)$. Знайдіть точку D, яка належить площині xz, таку, що $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$.

41.17.$^{\bullet\bullet}$ Дано вектор $\vec{a}\,(-2;\ 6;\ 3)$. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежно напрямлені, а модуль вектора $\vec{b}$ дорівнює 1.

41.18.$^{\bullet\bullet}$ Дано: $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5\sqrt{6}$, $\vec{n}\,(1;\ -1;\ 2)$. Знайдіть координати вектора $\vec{m}$.

41.19.$^{\bullet\bullet}$ Чи лежать на одній прямій точки:

1) $A\,(5;\ 6;\ -4)$, $B\,(7;\ 8;\ 2)$ і $C\,(3;\ 4;\ 14)$;

2) $D\,(-1;\ -7;\ -8)$, $E\,(0;\ -4;\ -4)$ і $F\,(2;\ 2;\ 4)$?

41.20.$^{\bullet\bullet}$ Точки A, B і C є такими, що $\overrightarrow{AB}\,(10;\ 15;\ -5)$ і $\overrightarrow{AC}\,(-6;\ y;\ z)$. При яких значеннях y і z точки A, B і C лежать на одній прямій?

41.21.$^{\bullet\bullet}$ Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AE}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

41.22.$^{\bullet\bullet}$ Дано паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M — середина ребра A_1B_1, точка K — середина ребра CC_1. Виразіть вектор $\overrightarrow{MK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

41.23.$^{\bullet\bullet}$ Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E — середина ребра CC_1, точка F — середина ребра AD. Виразіть вектор $\overrightarrow{EF}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

41.24. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см, а його площа — 432 см^2. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

42. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два ненульових і неспівнапрямлених вектори. Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, що дорівнюють відповідно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 42.1). Величину кута AOB називатимемо **кутом між векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Очевидно, що коли $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$ (рис. 42.2).

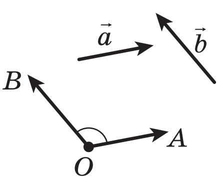


Рис. 42.1

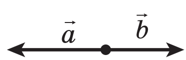


Рис. 42.2

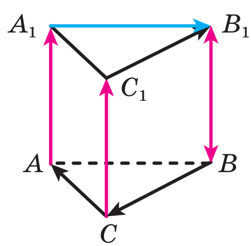


Рис. 42.3

Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°. Записують: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

На рисунку 42.3 зображено трикутну призму, основою якої є правильний трикутник, а бічне ребро перпендикулярне до площини основи.

Маємо: $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1B_1}) = 60°$, $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A_1B_1}) = 120°$, $\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}) = 0°$, $\angle(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BC}) = 90°$, $\angle(\overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{B_1B}) = 180°$.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Теорема 42.1. ***Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.***

Наприклад, для векторів, зображених на рисунку 42.3, маємо: $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, $\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{C_1C} = 0$.

Теорема 42.2. ***Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Теорема 42.3. ***Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}}$$

Деякі властивості скалярного добутку векторів аналогічні відповідним властивостям добутку чисел. Наприклад,

для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k є справедливими рівності:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Ці властивості разом із властивостями додавання векторів і множення вектора на число дають змогу перетворювати вирази, які містять скалярний добуток векторів, за правилами перетворення алгебраїчних виразів. Наприклад,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) =$$
$$= \vec{a}^{\,2} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}^{\,2} = \vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2}.$$

Задача. Основою призми є рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC$). Бічне ребро AA_1 утворює рівні кути з ребрами AB і AC (рис. 42.4). Доведіть, що $AA_1 \perp BC$.

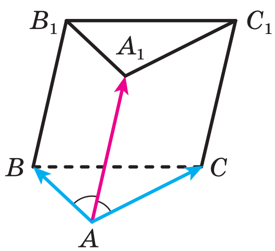


Рис. 42.4

Розв'язання. Нехай $\angle BAA_1 = \alpha$. З урахуванням умови можна записати: $\angle CAA_1 = \alpha$.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BC}$.

Маємо: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Запишемо:

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA_1}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB} =$$
$$= |\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\alpha - |\overrightarrow{AA_1}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos\alpha.$$

Оскільки $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$, то розглядуваний скалярний добуток дорівнює 0. Отже, $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$. ◀

1. Чому дорівнює кут між двома протилежно напрямленими векторами? двома співнапрямленими векторами?
2. Чому дорівнює кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо хоча б один із них нульовий?
3. Які вектори називають перпендикулярними?
4. Що називають скалярним добутком двох векторів?
5. Що називають скалярним квадратом вектора? Чому він дорівнює?
6. Сформулюйте умову перпендикулярності двох ненульових векторів.
7. Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомо їхні координати?
8. Запишіть властивості скалярного добутку векторів.

ВПРАВИ

42.1.° Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 42.5), точка O — центр грані $ABCD$. Чому дорівнює кут між векторами:

1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$;
2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BO}$;
4) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$;
5) $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BO}$;
6) $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{CC_1}$;
7) $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{B_1B}$;
8) $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{CD}$?

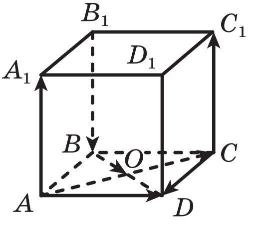


Рис. 42.5

42.2.° Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $40°$. Чому дорівнює кут між векторами:

1) $2\vec{a}$ і $\vec{b}$; 2) $\vec{a}$ і $-\vec{b}$; 3) $-3\vec{a}$ і $-5\vec{b}$; 4) $-7\vec{a}$ і $10\vec{b}$?

42.3.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30°$;
2) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

42.4.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120°$.

42.5.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\,(1; -2; 3)$, $\vec{b}\,(2; -4; 3)$; 2) $\vec{a}\,(-9; 4; 5)$, $\vec{b}\,(3; -1; 4)$.

42.6.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\,(4; -1; 6)$, $\vec{b}\,(-7; 2; 8)$; 2) $\vec{a}\,(1; -3; 9)$, $\vec{b}\,(-1; 3; 0)$.

42.7.° Дано вектори $\vec{m}\,(3; -2; 4)$ і $\vec{n}\,(2; 2; z)$. При якому значенні z виконується рівність $\vec{m} \cdot \vec{n} = 18$?

42.8.° Дано вектори $\vec{a}\,(9; c; -1)$ і $\vec{b}\,(-2; 3; c)$. При якому значенні c виконується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24$?

42.9.° Серед векторів $\vec{a}\,(1; 1; 2)$, $\vec{b}\,(1; 2; 1)$ і $\vec{c}\,(-5; 3; 1)$ укажіть пару перпендикулярних векторів.

42.10.• Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $45°$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$. Знайдіть:

1) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$; 3) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

42.11.• Кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ дорівнює $150°$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$. Знайдіть:

1) $(3\vec{m} - 4\vec{n}) \cdot \vec{m}$; 2) $(\vec{m} + \vec{n})^2$.

42.12.• Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $120°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Обчисліть скалярний добуток $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 7\vec{b})$.

42.13.• Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $60°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$. Обчисліть скалярний добуток $(5\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 5\vec{b})$.

42.14.• При якому значенні x вектори $\vec{a}\,(x;\,-x;\,1)$ і $\vec{b}\,(x;\,2;\,1)$ перпендикулярні?

42.15.• При якому значенні p вектори $\vec{a}\,(p;\,-2;\,1)$ і $\vec{b}\,(p;\,1;\,-p)$ перпендикулярні?

42.16.• Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$, якщо $\vec{a}\,(2;\,-1;\,-2)$, $\vec{b}\,(4;\,-3;\,2)$.

42.17.• Знайдіть скалярний квадрат $(\vec{m} - 2\vec{n})^2$, якщо $\vec{m}\,(2;\,1;\,-3)$, $\vec{n}\,(4;\,-2;\,0)$.

42.18.•• Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a, точка M — середина ребра AB. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\overrightarrow{CM}$ і $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

42.19.•• Основою піраміди $MABCD$ є квадрат, а кожне її ребро дорівнює a. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{AC}$.

42.20.•• Знайдіть кут між векторами $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$.

42.21.•• Знайдіть кут між векторами $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{3}$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30°$.

42.22.•• Знайдіть косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A\,(3;\,-2;\,1)$, $B\,(-1;\,2;\,1)$, $C\,(4;\,-1;\,5)$, $D\,(1;\,3;\,0)$.

42.23.•• Вершинами трикутника є точки $A\,(1;\,0;\,1)$, $B\,(-5;\,4;\,3)$ і $C\,(0;\,3;\,-1)$. Знайдіть кут A трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

42.24. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 10 см, а радіус вписаного в неї кола дорівнює 4 см. Знайдіть площу трапеції.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 6

Відстань між точками

Відстань між двома точками $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ можна знайти за формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Координати середини відрізка

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.

Взаємне розміщення двох векторів

Два ненульових вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Рівність векторів

Два ненульових вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульових вектори рівні.

Координати вектора

Якщо точки $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ — відповідно початок і кінець вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ і $z_2 - z_1$ дорівнюють відповідно першій, другій і третій координатам вектора $\vec{a}$.

Модуль вектора

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1;\ a_2;\ a_3)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Дії над векторами

Для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що: 1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$; 2) якщо $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; якщо $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Добуток $-1 \cdot \vec{a}$ позначають $-\vec{a}$ і називають вектором, протилежним вектору $\vec{a}$.

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.

Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнюють відповідно $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $(b_1;\ b_2;\ b_3)$, то:

- координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$;
- координати вектора $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнюють $(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$;
- координати вектора $k\vec{a}$ дорівнюють $(ka_1;\ ka_2;\ ka_3)$;
- скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;
- $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ (де вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ненульові).

43. Вправи для повторення курсу геометрії 10 класу

Паралельність у просторі

43.1. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Точка M не лежить у площині ABC. Чи можна провести площину через:
1) пряму AM і точки O і C;
2) пряму AC і точки B і M?

43.2. Точка M належить грані BB_1C_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — ребру AD (рис. 43.1). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною ABB_1.

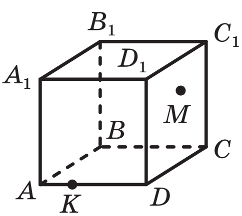


Рис. 43.1

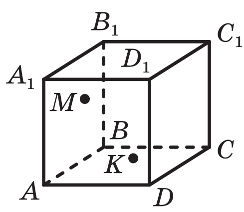


Рис. 43.2

43.3. Точка M належить грані AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — грані AA_1D_1D (рис. 43.2). Побудуйте точку перетину прямої MK із площиною $A_1B_1C_1$.

43.4. На ребрах BB_1, CC_1 і DD_1 призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено відповідно точки M, N і K, причому $BM \neq CN$, $BM \neq DK$ і $CN \neq DK$. Побудуйте лінію перетину площин ABC і MNK.

43.5. Точка M — середина ребра A_1B_1 призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра CD. Побудуйте лінію перетину площин AMK і BB_1C_1.

43.6. На ребрах AB, AD, AC і BC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E, F, M і K. Побудуйте лінію перетину площин EFM і DAK.

43.7. На ребрах DA і DB тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки M і K. Побудуйте лінію перетину площин ABC і MKC.

43.8. Пряма MK, яка не лежить у площині паралелограма $ABCD$, паралельна прямій AD. Яким є взаємне розміщення прямих: 1) MK і BC; 2) MK і AB?

43.9. Відомо, що прямі a і b паралельні, а пряма c перетинає пряму b і не перетинає пряму a. Доведіть, що прямі a і c є мимобіжними.

43.10. Відрізки AB і CD — діаметри одного кола. Площина α не має спільних точок з даним колом. Через точки A, B, C і D провели паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1, C_1 і D_1. Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 9$ см, $DD_1 = 3$ см.

43.11. Точка M не лежить у площині паралелограма $ABCD$. Доведіть, що $AB \parallel CMD$.

43.12. Трикутники ABC і ABD не лежать в одній площині. Точка M — середина відрізка AC, точка N — середина відрізка BC. На відрізку AD позначили точку K, а на відрізку BD — точку E так, що $KE \parallel ABC$. Доведіть, що $KE \parallel MN$.

43.13. На ребрах DA, DB і DC тетраедра $DABC$ позначили відповідно точки E, F і M так, що $\angle ABE = \angle FEB$, $\angle CBM = \angle FMB$. Доведіть, що площини ABC і EFM паралельні.

43.14. Відомо, що $\alpha \parallel \beta$, $a \parallel b$. Пряма a перетинає площину α в точці A, площину β — у точці B, а пряма b перетинає площину β в точці C (рис. 43.3). Побудуйте точку перетину прямої b і площини α.

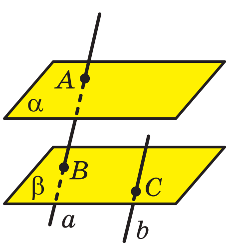


Рис. 43.3

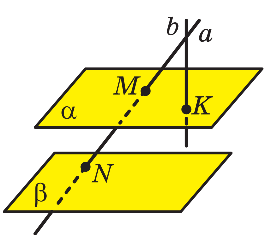


Рис. 43.4

43.15. Дано паралельні площини α і β та прямі a і b, що перетинаються. Пряма a перетинає площину α в точці M, площину β — у точці N, а пряма b перетинає площину α в точці K (рис. 43.4). Побудуйте точку перетину прямої b і площини β.

43.16. Медіани грані ADB тетраедра $DABC$ перетинаються в точці E, а медіани грані BDC — у точці F. Доведіть, що пряма EF паралельна площині ABC.

43.17. Чи є правильним твердження:

1) якщо паралельні проекції двох прямих на площину паралельні, то дані прямі паралельні;
2) якщо плоска фігура дорівнює своїй паралельній проекції, то площина, у якій лежить дана фігура, і площина, у якій лежить її проекція, паралельні?

43.18. Точки A_1, B_1 і C_1 є відповідно зображеннями вершин A, B і C паралелограма $ABCD$ (рис. 43.5). Побудуйте зображення паралелограма $ABCD$.

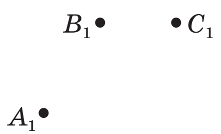


Рис. 43.5

43.19. Трикутник $A_1B_1C_1$ — зображення рівнобедреного прямокутного трикутника ABC із гіпотенузою AB, відрізок A_1B_1 — зображення гіпотенузи AB. Побудуйте зображення квадрата, який має з трикутником ABC спільний кут і всі вершини якого лежать на сторонах цього трикутника.

Перпендикулярність у просторі

43.20. Пряма m паралельна стороні AC трикутника ABC і не лежить у площині ABC, $\angle ABC = \angle BAC = 30°$.

1) Доведіть, що прямі m і BC мимобіжні.
2) Знайдіть кут між прямими m і BC.

43.21. Грань $ABCD$ прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадратом, а ребро AA_1 удвічі більше за ребро AB. Знайдіть кут між прямими: 1) AB_1 і CD; 2) AB_1 і CD_1; 3) AB_1 і A_1C_1.

43.22. Через вершину B трикутника ABC проведено пряму BD, перпендикулярну до площини ABC (рис. 43.6). Точка M — середина відрізка AC. Знайдіть відрізки DA і DM, якщо $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см, $DB = 24$ см.

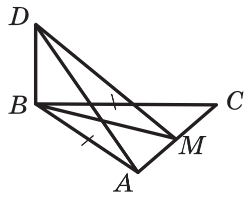


Рис. 43.6

43.23. Через центр O квадрата $ABCD$ проведено пряму MO, перпендикулярну до площини квадрата. Точка K — середина відрізка CD, $MC = 6$ см, $\angle MCK = 60°$.

1) Доведіть, що пряма CD перпендикулярна до площини MOK.
2) Знайдіть відрізок MO.

43.24. Відрізок AB не перетинає площину α, а пряма AB перетинає площину α в точці C. Через точки A і B проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках A_1 і B_1

відповідно. Знайдіть відрізок B_1C, якщо $AA_1 = 16$ см, $BB_1 = 6$ см, $A_1B_1 = 4$ см.

43.25. Відрізок AB перетинає площину α. Через точки A і B та середину C відрізка AB проведено прямі, які перпендикулярні до площини α та перетинають її в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть відрізок CC_1, якщо $AA_1 = 18$ см, $BB_1 = 9$ см.

43.26. Із точки M проведено до площини α перпендикуляр MH і рівні похилі MA і MB (рис. 43.7). Знайдіть відстань між основами похилих, якщо $\angle MAH = 30°$, $\angle AMB = 60°$, $MH = 5$ см.

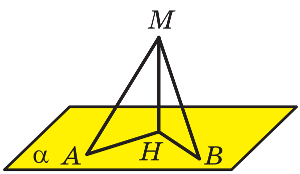


Рис. 43.7

43.27. Кут між діагоналлю прямокутника $ABCD$ та однією з його сторін дорівнює $30°$. Точка M віддалена від кожної вершини прямокутника на $5\sqrt{3}$ см, а від його площини — на $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу прямокутника.

43.28. Відрізок MC — перпендикуляр до площини трикутника ABC, $\angle ACB = 90°$, $AC = BC = 6$ см. Відстань від точки M до прямої AB дорівнює $3\sqrt{6}$ см. Знайдіть відстань від точки M до площини ABC.

43.29. Відрізок MB — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$, $AB = 5$ см, $BC = 16$ см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AD, якщо відстань від точки M до прямої CD дорівнює 20 см.

43.30. Через центр O кола, вписаного в трикутник ABC зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см, проведено перпендикуляр DO до площини ABC. Відстань від точки D до площини ABC дорівнює $2\sqrt{15}$ см. Знайдіть відстань від точки D до сторін трикутника.

43.31. Точка M, рівновіддалена від вершин правильного трикутника ABC, розташована на відстані 5 см від його площини. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо кут між прямою MA та площиною ABC дорівнює $60°$.

43.32. Відрізок DC — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$), $DC = 9$ см, $AC = 15$ см, $BC = 20$ см. Відрізок DE — перпендикуляр, опущений із точки D на пряму AB. Знайдіть кут між прямою DE та площиною ABC.

43.33. Відрізок MK не перетинає площину α. Знайдіть кут між прямою MK та площиною α, якщо $MK = 6$ см, а кінці відрізка MK віддалені від площини α на $8\sqrt{3}$ см і на $5\sqrt{3}$ см.

43.34. Сторона BC правильного трикутника ABC лежить у площині α, висота AH цього трикутника утворює з площиною α кут φ. Знайдіть кут між прямою AB та площиною α.

43.35. Точка A лежить усередині двогранного кута, величина якого дорівнює α. Відстань від точки A до кожної грані цього кута дорівнює h. Знайдіть відстань від точки A до ребра двогранного кута.

43.36. Відрізок MC — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$). Знайдіть кут між площинами ABC і ABM, якщо $AC = 8$ см, $\angle BAC = 30°$, а відстань від точки M до прямої AB дорівнює 12 см.

43.37. Через сторону AB трикутника ABC проведено площину α. Кут між площинами ABC і α дорівнює $60°$. Знайдіть відстань від точки C до площини α, якщо $AC = 7$ см, $AB = 10$ см, $BC = 13$ см.

43.38. Кут між квадратом $ABCD$ і прямокутником $AEFD$ становить $60°$. Площа квадрата дорівнює 16 см^2, а площа прямокутника — 32 см^2. Знайдіть відстань між прямими, які містять паралельні сторони даних квадрата й прямокутника.

43.39. Пряма c — лінія перетину перпендикулярних площин α і β. Точка M віддалена від площини α на 9 см, а від площини β — на 12 см. Знайдіть відстань між точкою M і прямою c.

43.40. Через вершину прямого кута C трикутника ABC проведено пряму m, перпендикулярну до площини ABC. На прямій m позначили точку D таку, що кут між площинами ABC і ABD дорівнює $30°$. Знайдіть площу трикутника ABD, якщо $AB = 16$ см, $\angle BAC = 45°$.

43.41. Проекцією трапеції, площа якої дорівнює $40\sqrt{2}$ см^2, є рівнобічна трапеція з основами 7 см і 13 см та бічною стороною 5 см. Знайдіть кут між площинами даних трапецій.

Координати та вектори в просторі

43.42. Дано точки $A\ (7;\ 3;\ -1)$ і $B\ (x;\ 5;\ z)$. Відомо, що середина C відрізка AB належить осі ординат.

1) Знайдіть координати точки C.
2) Знайдіть значення x і z.

43.43. Дано точки $A\ (8;\ 0;\ 4)$, $B\ (13;\ 4;\ 7)$, $C\ (11;\ -3;\ 3)$.

1) Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.
2) Знайдіть площу круга, описаного навколо трикутника ABC.

43.44. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника ABC з основою AC, якщо відомо, що $A\ (1;\ 1;\ -2)$, $C\ (-3;\ 3;\ 2)$, а точка B належить осі аплікат.

43.45. Дано точки A (–2; 1; 3), B (0; 5; 9) і C (–3; y; 6). При яких значеннях y відрізок AB у 2 рази довший за відрізок AC?

43.46. Від точки C (2; –3; 1) відклали вектор $\overrightarrow{CD}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$. Знайдіть координати точки D, якщо A (–1; 0; 5), B (0; 4; –1).

43.47. Дано точки A (1; 0; 1), B (2; 1; –1) і C (–1; 2; 0). Знайдіть координати точки D такої, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

43.48. Вектори $\vec{a}$ (x; 3; –4) і $\vec{b}$ (20; –12; 16) лежать на протилежних сторонах паралелограма. Знайдіть значення x.

43.49. Дано точки A (–4; 1; 2), B (–2; 0; –1) і C (1; 1; 0). Знайдіть координати точки D, яка належить площині yz, такої, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ є колінеарними.

43.50. Медіани грані BDC тетраедра $DABC$ перетинаються в точці O, точка M — середина ребра AD. Виразіть вектор $\overrightarrow{MO}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

43.51. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ (2; 2; 1) і $\vec{b}$ (6; –2; –3).

43.52. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ (3; –2; 4) і $\vec{b}$ (2; 3; 0).

43.53. При яких значеннях x вектори $\vec{a}$ (x; –2; 1) і $\vec{b}$ (x; $2x$; 3) перпендикулярні?

43.54. Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, колінеарного вектору $\vec{n}$ (1; –2; 1), якщо $\vec{m}\cdot\vec{n}=-3$.

43.55. Знайдіть кут між вектором $\vec{a}$ (–1; 2; 5) і додатним напрямом осі абсцис.

43.56. Знайдіть кут між вектором $\vec{b}$ (6; –2; –3) і від'ємним напрямом осі аплікат.

43.57. Відомо, що $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=135°$. Знайдіть $|\vec{a}-\vec{b}|$.

43.58. Точка M — середина ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра A_1B_1. Знайдіть кут між прямими MB_1 і DK.

Відповіді та вказівки до вправ

Розділ 1. Алгебра і початки аналізу

§ 1. Функції, їхні властивості та графіки

1.16. 1) 16; 2) 32. **1.17.** 2500 м^2. **1.22.** 2; 5. **1.23.** −3; −1. **1.28.** 3) {−6}.

2.7. 4) $\min\limits_{(-\infty;\,-2]} f(x) = 256;$ найбільшого значення не існує. **2.11.** 1) Якщо $a = 6$, то один корінь; якщо $a > 6$, то 2 корені; якщо $a < 6$, то коренів немає; 2) якщо $a = 1$ або $a = -8$, то один корінь; якщо $a < -8$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $-8 < a < 1$, то коренів немає.

3.5. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. **3.6.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};\,1\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};\,1\right]} f(x) = 1$; 2) $\max\limits_{\left[-1;\,-\frac{1}{2}\right]} f(x) = 64$, $\min\limits_{\left[-1;\,-\frac{1}{2}\right]} f(x) = 1$; 3) $\max\limits_{[1;\,+\infty)} f(x) = 1$, найменшого значення не існує. **3.7.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3};\,2\right]} f(x) = 27$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{3};\,2\right]} f(x) = \frac{1}{8}$; 2) $\max\limits_{[-2;\,-1]} f(x) = -\frac{1}{8}$, $\min\limits_{[-2;\,-1]} f(x) = -1$; 3) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty;\,-3]} f(x) = -\frac{1}{27}$.

4.4. 5) −1. **4.8.** 6) Розв'язків немає; 9) 5; −15. **4.9.** 5) −0,5; 6) 0; 6. **4.12.** 29. **4.13.** −11,8. **4.14.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[-1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. **4.15.** 1) $(-\infty; 2]$; 2) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. **4.16.** 4) −5 і −4. **4.20.** 1) −1; 2; 2) −1; 3. **4.21.** −3; 1.

5.11. 0. **5.12.** $27\sqrt[3]{2}$. **5.13.** 3) $\sqrt[12]{128}$. **5.14.** 3) $\sqrt[3]{a}$. **5.19.** 1) $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; 2) $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$; 3) a і b — довільні числа; 4) a і b — довільні числа. **5.20.** 2) $\mathbb{R}$. **5.21.** 2) $-n$; 4) c^4. **5.22.** 2) $10x$. **5.25.** 1) $[-4; +\infty)$; 2) $\mathbb{R}$. **5.26.** 2) $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. **5.28.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$. **5.29.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$. **5.30.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b \geqslant 0$; $-\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b < 0$; 3) $-\sqrt[6]{-a^7}$. **5.31.** 1) $\sqrt[6]{a^7}$; 2) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **5.32.** [3; 5]. **5.34.** 6) 16.

6.5. 3) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{2}$. **6.6.** 3) 4. **6.7.** 3) 125. **6.8.** 2) 49. **6.11.** 1) 6; 2) 100; 3) $12\frac{4}{9}$; 4) 2. **6.12.** 1) 7; 2) 10; 3) $122\frac{7}{9}$. **6.13.** 2) $a^{0,5}-2b^{0,5}$; 5) $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. **6.14.** 3) $1+\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$. **6.15.** $\frac{a^{0,5}b^{0,5}}{a^{0,5}+b^{0,5}}$. **6.16.** $2m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}$.

7.3. 3) −1; 1. **7.4.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) коренів немає; 4) 7. **7.5.** 2) Коренів немає. **7.6.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) 5; 5) 4; 6) 2. **7.7.** 1) −5; 2) 4; 3) −1; 4) 5. **7.8.** 1) 4; 2) 2; 3. **7.9.** $\frac{1}{3}$. **7.10.** 1) 1; $-\frac{27}{8}$; 2) 16; 3) 25; 4) 8; 5) 0; 16; 6) $\frac{9}{8}$. **7.11.** 1) 16; 2) 1; 512; 3) −4; 11; 4) 2,8; −1,1. **7.12.** 1) 0; 5; 2) 7. **7.13.** 1) 6; 2) 2; 3) −1; 3; 4) −2. **7.14.** 1) 2; 2) 8. **7.15.** 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) коренів немає; 4) 1; −3. **7.16.** 1) −5; 4; 2) −1. **7.17.** 1) 1; 4; 2) $-\sqrt{11}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{11}$; 3) −1; 4; 4) −2; 5. **7.18.** 1) −1; 5; 2) 1; 2; 3) −6; 4. **7.19.** 27. **7.20.** 10. **7.22.** $f(x)=-2x+1$.

§ 2. Тригонометричні функції

8.4. 3) 10π. **8.5.** 2) $\frac{9\pi}{2}$. **8.8.** 8) У I чверті. **8.9.** 4) У III чверті; 7) у II чверті. **8.10.** 3) (0; −1); 6) (1; 0). **8.11.** 2) (−1; 0). **8.13.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 2) 2π; -2π. **8.14.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **8.15.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **8.16.** 1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$; 2) (0; −1); 3) (0; 1), (0; −1); 4) (1; 0), (−1; 0). **8.19.** 1) −2; 2) $-\frac{4}{3}$. **8.20.** 80 000 мешканців.

9.1. 1) 5; 4) $\frac{7}{4}$. **9.2.** 1) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **9.3.** 1) Ні; 2) ні. **9.4.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **9.5.** 1) 3; −3; 3) 3; 1; 4) 1; 0. **9.6.** 2) 1; −5. **9.11.** *Вказівка.* Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті поворотів точки P_0

на кути α і $\alpha+\frac{\pi}{2}$ відповідно. Опустимо перпендикуляри P_1A і P_2B на осі x і y відповідно (рис. 9.3). Оскільки $\angle P_1OP_2=\frac{\pi}{2}$, то можна встановити, що $\Delta OP_1A=\Delta OP_2B$. Звідси $OA=OB$. Отже, абсциса точки P_1 дорівнює ординаті точки P_2, тобто $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. Інші випадки розташування точок P_1 і P_2 розглядають аналогічно. Окремо розгляньте випадки, коли точки P_1 і P_2 лежать на координатних осях.

10.4. 1) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **10.5.** $-\frac{1}{2}$. **10.6.** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **10.7.** 1,5. **10.8.** 1) II чверті. **10.12.** 1) 2 sin α; 2) −2 cos α; 3) 0. **10.13.** 1) 0; 2) 0; 3) 0. **10.14.** 1) Парна; 2) не є ні парною, ні непарною. **10.15.** 1) Непарна; 2) парна. **10.16.** 1) 5; 2) 2.

11.1. 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$. **11.2.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 4) $\frac{1}{2}$. **11.15.** 2) $\cos 20° > \cos 21°$; 3) $\sin\frac{10\pi}{9}>\sin\frac{25\pi}{18}$. **11.16.** 2) $\sin\frac{5\pi}{9}>\sin\frac{17\pi}{18}$. **11.19.** 1) $\sin 58° > \cos 58°$; 2) $\sin 18° < \cos 18°$; 3) $\cos 80° < \sin 70°$. **11.21.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[3; +\infty)$.

12.1. 5) $2\cos^2\alpha$. 6) 2. **12.2.** 3) 1; 4) 1. **12.5.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 3) $\sin^4\alpha$; 4) 1. **12.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos\beta}$; 4) $\frac{1}{\cos x}$. **12.7.** 2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **12.8.** 1) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$. **12.11.** $-\frac{1}{2}$. *Вказівка*. Поділіть чисельник і знаменник даного дробу на cos α. **12.12.** $-\frac{16}{11}$. **12.13.** 2; 1. **12.14.** 3; −2. **12.15.** 1) 125; 2) 2.

13.1. 3) 0; 4) 0. **13.2.** 2) 0. **13.3.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) sin 2β; 6) tg 15°. **13.4.** 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) cos $(\alpha+\beta)$. **13.5.** $\frac{6}{7}$. **13.7.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.8.** 1) $\sqrt{3}$. **13.9.** 1) 2 cos α; 2) tg 2α; 3) $\cos^2\alpha$; 4) sin 25°;

5) $\cos\alpha+\sin\alpha$; 6) $\cos\frac{\alpha}{2}$; 7) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 8) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha$. **13.10.** 1) $2\sin 40°$; 2) $\cos^2 2\beta$; 3) 1; 4) 1; 5) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 6) $2\sin 2\alpha$; 7) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 8) $\sin 3\alpha$. **13.11.** 1) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.12.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.15.** $-\frac{24}{25}$. **13.16.** $-\frac{4}{5}$. **13.17.** 2. **13.18.** 5. **13.19.** $-0{,}96$. **13.20.** $-\frac{8}{15}$. **13.21.** $\frac{7}{8}$. **13.22.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **13.23.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **13.25.** 1. **13.26.** 1) 2; 2) $\operatorname{tg}2\alpha$; 3) $\sin 2\alpha$; 4) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **13.27.** 1) $\frac{2}{\operatorname{tg}4\alpha}$; 2) $\operatorname{tg}2\alpha$. **13.28.** 2. **13.29.** -2. **13.30.** $-\frac{8}{9}$. **13.31.** $\frac{3}{4}$. **13.32.** При $x=1$: 9, 6, 3; при $x=9$: 41, 62, 83. **13.33.** При $x=2$: 1, -3, 9; при $x=\frac{4}{3}$: $\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $\frac{25}{3}$.

14.3. 3) $-\cos 38°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{18}$. **14.4.** 2) $\sin\frac{\pi}{15}$. **14.7.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) 1. **14.8.** -1. **14.9.** 1) $-\cos\alpha$; 2) 1. **14.11.** 0. **14.12.** 1) 1; 2) 1.

15.3. 2) $\pm\frac{\pi}{5}+\frac{12\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm 3\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}+6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.4.** 2) $\pm\frac{25\pi}{6}+10\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{4\pi}{3}+\frac{8\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.5.** 3) $12+6\pi+12\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.6.** 2) $\pm\frac{3\pi}{2}-6+4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.7.** $-\frac{\pi}{6}$. **15.8.** Наприклад, -3π. **15.9.** 4 корені. **15.10.** $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{31\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$. **15.11.** 1. **15.12.** 1) $\left[0;\frac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)$; 2) $[-3;-2)\cup(-2;3]$.

16.3. 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{(-1)^{n+1}}{8}\arcsin\frac{2}{9}+\frac{\pi n}{8}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.4.** 3) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+\frac{5\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.7.** 3) $-\frac{4\pi}{21}+\frac{4\pi n}{7}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.9.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.10.** 2) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{5\pi}{6}+20+5\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.11.** 2) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. **16.12.** 2) $-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$,

$n \in \mathbb{Z}$. **16.13.** $\frac{13\pi}{12}$. **16.14.** $-\frac{13\pi}{90}$. **16.15.** $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$. **16.16.** 6 коренів. **16.17.** 4 корені. **16.18.** $-\frac{2\pi}{3}$. **16.19.** 1) 5; 2) 3; 3) 7; 4) 4.

17.1. 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\quad n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **17.2.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ -\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pm 4\arccos\frac{1}{3} + 8\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **17.3.** 1) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$. **17.4.** 1) $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}$. **17.5.** 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pm\arccos(1 - \sqrt{2}) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $2\pi n,$ $\pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm 2\pi + 6\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ 2\pi + 4\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$. **17.6.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n \arcsin(2 - \sqrt{3}) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$; 5) $(-1)^{n+1}\pi + 6\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **17.7.** 1) $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **17.8.** 1) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. **17.10.** 3) -2; 4) 1.

§ 3. Похідна та її застосування

18.7. 8 м/с. **18.8.** 1) 20 м/с; 2) 10 м/с.

19.4. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **19.5.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **19.8.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1.

19.9. 1) −32; 2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **19.12.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$.
19.13. 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$.

20.9. 16 кг · м/с. **20.10.** 400 Дж. **20.12.** 1) $y = 4x - 8$; 2) $y = -4$; 3) $y = -x - 3$.

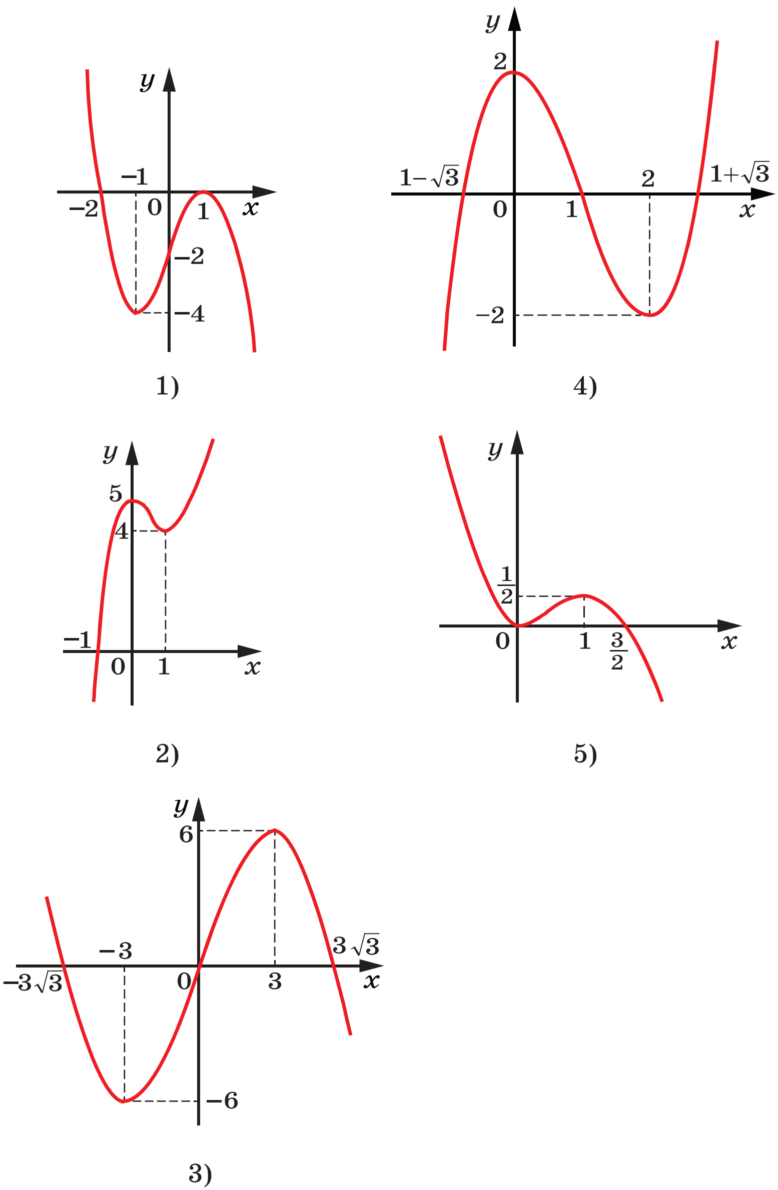
21.1. 1) $y = x - 1$; 2) $y = -4x + 4$; 3) $y = \frac{2}{3}x + 3$; 4) $y = x$; 5) $y = -1$; 6) $y = x + 4$. **21.2.** 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = -2x + 2$; 3) $y = -x + \frac{\pi}{2}$; 4) $y = 5x - 18$. **21.3.** $y = -3x - 3$. **21.4.** $y = -5x + 2$. **21.5.** 1) $y = 6x - 3$; 2) $y = 2x - 2$, $y = 2x + 2$. **21.6.** 1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; 2) $y = -3x + 9$, $y = 3x$.
21.7. 4) $[1; 3) \cup (3; 4]$.

22.1. 1) Зростає на $[-2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -2]$; 2) зростає на $(-\infty; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $[0; 1]$; 3) зростає на $[-1; 7]$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[7; +\infty)$; 4) зростає на $[2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 2]$.
22.2. 1) Зростає на $(-\infty; 3]$, спадає на $[3; +\infty)$; 2) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $[-3; 1]$; 3) зростає на $[-1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$.
22.3. 1) Зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 1]$; 2) зростає на $(-\infty; 2)$ і на $(2; +\infty)$; 3) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $(0; 1]$; 4) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0)$ і $(0; 3]$.
22.4. 1) Зростає на $(-\infty; 3]$, спадає на $[3; +\infty)$; 2) зростає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(0; 2]$. **22.9.** $-\frac{1}{3}$.

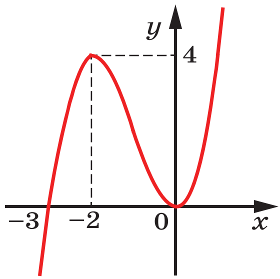
23.3. 1) $x_{min} = 0$; 2) $x_{min} = 3$; 3) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 4) $x_{min} = 5$, $x_{max} = -1$. **23.4.** 1) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -1$; 2) $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$; 3) $x_{min} = 1$, $x_{max} = -7$; 4) $x_{min} = \frac{3}{2}$. **23.7.** 1) Зростає на $(-\infty; -2]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $[-2; 0)$ і $(0; 2]$, $x_{max} = -2$, $x_{min} = 2$; 2) зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; +\infty)$, $x_{max} = 0$. **23.8.** 1) Зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0)$ і $(0; 3]$, $x_{max} = -3$, $x_{min} = 3$; 2) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{min} = 0$. **23.9.** 1) −25; 2) −13; 3) −22. **23.10.** 1) 26; 2) 17; 3) −10.

24.1. 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) −3; −30; 4) −4; −8. **24.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; −2; 3) 48; −6; 4) 0; −28. **24.3.** 8 = 2 + 6. **24.4.** 12 = 8 + 4.
24.5. 180 = 40 + 80 + 60. **24.6.** 18 = 8 + 3 + 7.

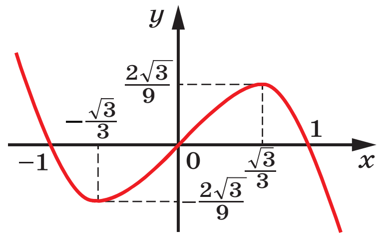
25.1. Див. рисунок. **25.2.** Див. рисунок.



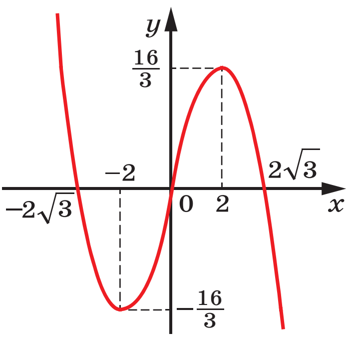
До задачі 25.1



1)



3)



2)

До задачі 25.2

26.6. 1) −163; 2) 3. **26.14.** 5) $\frac{1}{3}$. **26.16.** 1) 4; 2) 2; 3) 3; 4) −2; 5) −2; 6) $\frac{2}{9}$; 2; 7) 625; 8) −25; 3. **26.19.** $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **26.20.** 2; −3. **26.21.** 1) 0; 2) 0. **26.22.** −1. **26.24.** 1) tg α; 2) 2; 3) 0; 4) 1. **26.25.** 1) $-\frac{7\pi}{2}+12\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{7\pi}{3}+4\pi k$ або $-\pi+4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.26.** $\frac{\pi}{2}$. **26.27.** $-\frac{\pi}{24}$. **26.28.** 2 корені. **26.29.** 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **26.32.** 3. **26.33.** 1. **26.34.** 3) $y = -6x+13$; 4) $y = \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.35.** $y=-4x$ і $y=4x-16$. **26.36.** 3,5 с.

26.38. 2) Зростає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $[4; +\infty)$, спадає на проміжку $[0; 4]$, $x_{max} = 0$, $x_{min} = 4$; 3) зростає на проміжках $(-\infty; -4]$ і $[4; +\infty)$, спадає на проміжках $[-4; 0)$ і $(0; 4]$, $x_{max} = -4$, $x_{min} = 4$; 6) зростає на проміжках $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$, спадає на проміжках $[-3; -1)$ і $(-1; 1]$, $x_{max} = -3$, $x_{min} = 1$. **26.39.** 2) 2; −2. **26.40.** 32 + 32. **26.41.** 2.

Розділ 2. Стереометрія

§ 4. Паралельність у просторі

27.6. Безліч або одну. **27.14.** 11 см або 3 см. **27.15.** 10 см. **27.16.** 1 : 3.

28.15. 72°, 108°, 72°, 108°.

29.9. Одну площину або три площини. **29.14.** 4 см. **29.15.** 9 см. **29.16.** 1 : 2.

30.12. 7,5 см. **30.13.** 8 : 3. **30.14.** *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta ABC \sim \Delta EBF$, і скористайтеся рівністю кутів подібних трикутників. **30.18.** 156 см^2.

31.13. 2) 24 см. **31.15.** 1,5.

32.8. 9 см. **32.14.** 60°.

§ 5. Перпендикулярність у просторі

33.4. 60°. **33.5.** 1) 90°; 2) 40°. **33.6.** 1) 0°; 2) 70°; 3) 35°. **33.7.** 80°. **33.8.** 10 см. **33.9.** 10 см. **33.10.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **33.11.** α або $180° - \alpha$. **33.12.** 90°. *Вказівка*. Доведіть, що шуканий кут дорівнює куту між прямими OB_1 і AC та що трикутник AB_1C рівнобедрений. **33.13.** 60°. **33.14.** 52 см.

34.7. 2 см. **34.8.** $2\sqrt{5}$ см. **34.9.** 1) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **34.10.** 8 см. **34.13.** 12 см. **34.14.** 14 см. **34.15.** 12 см.

35.5. 7 см. **35.6.** 12 см. **35.16.** 15 см. **35.17.** 15 см, 13 см. **35.18.** 3 см. **35.19.** 12 см. **35.23.** $3\sqrt{5}$ см. **35.24.** 2 см. **35.25.** $2\sqrt{2}$ см.

35.26. $2\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{6}$ см, $\sqrt{6}$ см. **35.27.** 17 см. **35.28.** 8 см. **35.29.** 10 см. **35.30.** 5 см. **35.31.** 4 см. **35.33.** 20 см. **35.34.** $3\sqrt{10}$ см. **35.36.** $4\sqrt{3}$ см.

36.7. 30°. **36.10.** 30°. **36.11.** $6\sqrt{2}$ см. **36.12.** 3 см. **36.13.** $8\sqrt{2}$ см. **36.14.** $3\sqrt{10}$ см. **36.15.** 6 см. **36.16.** $3\sqrt{14}$ см. **36.17.** 30°. **36.18.** 30°.

37.6. 60°. **37.7.** 60°. **37.11.** 80°. **37.16.** 35 см. **37.18.** 84 см^2. **37.20.** 105°. **37.21.** 70°. **37.22.** $\sqrt{5}$ см. **37.23.** 120°. **37.24.** $5\sqrt{2}$ см, 13 см. **37.25.** 45°. **37.26.** $3\sqrt{2}$ см. **37.27.** 25 см. **37.28.** 8 см. **37.29.** 45°. **37.30.** 30°, 60°. **37.31.** 1) $2\sqrt{15}$ см; 2) 8 см. **37.32.** 13 см. **37.33.** 45°. **37.34.** 60°. **37.35.** 90°. **37.36.** 26 см.

§ 6. Координати та вектори в просторі

38.18. 66. **38.19.** $3\sqrt{14}$. **38.20.** $y=-2$ або $y=-10$. **38.21.** A (3; 0; 0) або A (−1; 0; 0). **38.22.** 5. **38.23.** 13. **38.24.** 625 см^2.

39.10. 3. **39.13.** D (7; −4; 5). **39.14.** $x=20$, $y=-29$, $z=-18$. **39.15.** −3 або 3. **39.16.** −14 або 2. **39.18.** B (−3; 16; −7). **39.19.** $\vec{m}(4; 4; 4)$ або $\vec{m}(-4; -4; -4)$. **39.20.** $\vec{c}\left(3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\right)$ або $\vec{c}\left(-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}; -3\sqrt{3}\right)$. **39.21.** 13 см.

40.11. $\overrightarrow{NK}$. **40.12.** $\overrightarrow{FM}$. **40.15.** A (3,5; −1,5; 8). **40.16.** M (−0,5; −2,5; 4,5). **40.17.** 9,6 см.

41.14. $x=-\frac{4}{7}$, $z=\frac{35}{4}$. **41.15.** $\overrightarrow{AB}\left(-1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **41.16.** D (6; 0; 10). **41.17.** $\vec{b}\left(\frac{2}{7}; -\frac{6}{7}; -\frac{3}{7}\right)$. **41.18.** $\vec{m}(5; -5; 10)$. **41.19.** 1) Ні; 2) так. **41.20.** $y=-9$, $z=3$. **41.21.** $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.22.** $\overrightarrow{MK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.23.** $\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$. **41.24.** 8 см.

42.7. 4. **42.8.** −3. **42.9.** $\vec{a}$ і $\vec{c}$. **42.12.** −19,5. **42.13.** −12. **42.14.** 1. **42.15.** −1 або 2. **42.16.** 143. **42.17.** 70. **42.18.** 1) $-\frac{a^2}{2}$. *Вказівка*. Виразіть вектор $\overrightarrow{CM}$ через вектори $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$; 2) 0. *Вказівка*. Виразіть вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектори $\overrightarrow{DA}$ і $\overrightarrow{DB}$. **42.19.** a^2. *Вказівка*. Виразіть вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$. **42.20.** $180° - \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **42.21.** $180° - \arccos\frac{7\sqrt{19}}{38}$. **42.22.** 0,7. **42.23.** 60°. **42.24.** 80 см².

43.10. 11 см. **43.20.** 2) 60°. **43.21.** 1) arctg 2; 2) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$. **43.22.** 26 см, $8\sqrt{10}$ см. **43.23.** 2) $3\sqrt{2}$ см. **43.24.** 2,4 см. **43.25.** 4,5 см. **43.26.** 10 см. **43.27.** $25\sqrt{3}$ см². **43.28.** 6 см. **43.29.** 13 см. **43.30.** 8 см. **43.31.** $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ см². **43.32.** $\mathrm{arctg}\frac{3}{4}$. **43.33.** 60°. **43.34.** $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)$. **43.35.** $\frac{h}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **43.36.** $\arccos\frac{1}{3}$. **43.37.** 6 см. **43.38.** $4\sqrt{3}$ см. **43.39.** 15 см. **43.40.** $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ см². **43.41.** 45°. **43.42.** 1) C (0; 4; 0); 2) $x=-7$, $z=1$. **43.43.** 2) $\frac{69\pi}{4}$. **43.44.** 9. **43.45.** $y=3$ або $y=-1$. **43.46.** D (3; 1; −5). **43.47.** D (−2; 1; 2). **43.49.** D (0; 1,5; 1,5). **43.50.** $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$. **43.51.** $\frac{5}{21}$. **43.52.** 90°. **43.53.** $x=1$ або $x=3$. **43.54.** $\vec{m}$ (−0,5; 1; −0,5). **43.55.** $180° - \arccos\frac{\sqrt{30}}{30}$. **43.56.** $\arccos\frac{3}{7}$. **43.57.** $2\sqrt{5}$. **43.58.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Зміст

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дізайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Коректор *А. Ю. Вєнза*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 16,00. Обл.-вид. арк. 14,86.
Тираж 115 656 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

Форзац 3

Значення тригонометричних функцій деяких аргументів

$\alpha°$	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Формули додавання

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \quad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \quad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}; \quad \mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Форзац 4

Формули коренів найпростіших тригонометричних рівнянь

Рівняння	Формула коренів рівняння
$\cos x = b,\ \lvert b\rvert \leqslant 1$	$x = \pm\arccos b + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$
$\sin x = b,\ \lvert b\rvert \leqslant 1$	$x = (-1)^n \arcsin b + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$
$\mathrm{tg}\,x = b$	$x = \mathrm{arctg}\,b + \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Рівняння	Формула коренів рівняння
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n$

Рівняння	Формула коренів рівняння
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\sin x = 0$	$x = \pi n$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

Якщо S — площа многокутника,
$S_{пр}$ — площа його ортогональної проекції,
α — кут між многокутником та його проекцією, то

$$S_{пр} = S\cos\alpha$$

Відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

Координати середини відрізка,
що сполучає точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Модуль вектора $\vec{a}$ з координатами $(a_1; a_2; a_3)$:

$$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a}\ (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}\ (b_1; b_2; b_3)$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\angle(\vec{a},\vec{b}); \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}\ (a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}\ (b_1; b_2; b_3)$:

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Умова перпендикулярності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

9 789664 743102